Rozvíjení matematických talentů na středních školách II

MATEMATICKÉ TALENTY

METODICKÝ MATERIÁL
Zvyšování kvality matematického vzdělávání na středních školách: motivace ke studiu a příprava k matematickým soutěžím a olympiádám – projekt OP VVV

Rozvíjení matematických talentů na středních školách

II

KOLEKTIV AUTORŮ

Praha 2020

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace byla vydána v rámci Operačního programu – Výzkum, vývoj a vzdělávání (OP VVV) a jeho projektu *Zvyšování kvality matematického vzdělávání na středních školách: motivace ke studiu a příprava k matematickým soutěžím a olympiádám.*

Autoři: Tomáš Bárta, Filip Bialas, Matěj Doležálek, Šárka Gergelitsová, Zdeněk Halas, Antonín Jančařík, Jan Krejčí, Jakub Löwit, Luboš Pick, Marian Poljak, Martin Raška, Alena Skálová, Antonín Slavík, Zbyněk Šír, Radovan Švarc, Miroslav Zelený

Recenzenti: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Editoři: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

ISBN 978-80-7378-427-0 (e-kniha PDF)
ISBN 978-80-7378-425-6 (tištěná kniha)

Obsah

Úvod

Tato kniha je souborem příspěvků vzniklých jako doprovodný materiál k přednáškám, které budou v tomto roce pořádány na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, a to v rámci projektu *Zvyšování kvality matematického vzdělávání na středních školách: motivace ke studiu a příprava k matematickým soutěžím a olympiádám.* Sledují přitom zadání úloh domácího kola 70. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol, přičemž každé úloze je věnován jeden příspěvek.

Tým autorů sestává na jedné straně ze zkušených pedagogů Matematicko-fyzikální fakulty, a na straně druhé z jejích studentů, kteří v Matematické olympiádě slavili v nedávné době znamenité úspěchy. Spojuje je značná zkušenost s úlohami typickými pro MO, o kterých všichni autoři často přednášejí, ať už pro soutěžící, nebo pro pedagogy středních škol. Každý z autorů ke svému příspěvku přistoupil poněkud odlišným způsobem a v malé míře došlo i k určitému překryvu témat.

Společným rysem všech příspěvků je jejich hlavní účel. Jejich četba má nejrůznějším způsobem usnadnit řešení úloh MO. Sborník je určen na prvním místě středoškolským profesorům, jimž může přinést inspiraci pro péči o talentované žáky v seminářích či při individuálních konzultacích. Věříme však, že je vhodný i přímo pro nadané studenty. Aniž by jim vyzradil řešení úloh, může je k úspěšné účasti v tomto ročníku MO povzbudit. Z dlouhodobého hlediska věříme, že představená látka a úlohy jsou vhodným obecným studijním materiálem pro adepty MO i pro všechny talentované žáky.

Všichni autoři by rádi poděkovali oběma recenzentům za pečlivě přečtení všech kapitol a za řadu cenných připomínek, které vedly ke zlepšení textu.

Praha, září 2020 Zbyněk Šír, Zdeněk Halas

Kategorie

A

PRVOČÍSELNÁ ŘEŠENÍ ROVNIC

Tomáš Bárta

Tento text obsahuje několik úloh týkajících se hledání prvočíselných řešení rovnic, tj. úloh podobných úloze 70-A-I-1 matematické olympiády:

Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je (a) pět; (b) sedm.

Hlavní roli při řešení této úlohy hraje dělitelnost. Druhou ingrediencí, kterou lze při řešení využít, jsou odhady, které nám řeknou, že hledaná prvočísla nemohou být moc velká. Níže najdete dvě kapitolky věnované těmto dvěma tématům (dělitelnosti a odhadům), a pak třetí kapitolku, která se věnuje složitějším úlohám, jež kombinují obě témata.

1 Návodné úlohy – dělitelnost

Zkusme se nejprve zamyslet nad následující úlohou.

Úloha 1.1. *Součet tří prvočísel je 2021 a vydělíme-li jejich součin číslem 2021, získáme celé číslo. Určete toto číslo.*

Řešení. Označme tato prvočísla a, b a c. Ze zadání víme, že jejich součet $a + b + c = 2021$ a $abc = 2021k$ pro nějaké přirozené k, které hledáme. Protože prvočíselný rozklad čísla 2021 je $43 \cdot 47$, musí nutně být jedno z prvočísel a, b, c rovno 43 (nechť je to a) a druhé 47 (nechť je to b). Třetí prvočíslo c tedy musí být rovno hledanému k. Rovnice pro součet prvočísel dává $43 + 47 + c = 2021$, odkud $c = 1931$, což je prvočíslo. Hledané číslo je 1931. □

Úloha 1.2. *Součet 2020 prvočísel dělí jejich součin. Určete nejmenší z těchto prvočísel.*

Řešení. Kdyby byla všechna prvočísla lichá, byl by jejich součet sudý, ale jejich součin je lichý, což je spor. Tedy aspoň jedno prvočíslo je sudé, proto nejmenší z těchto prvočísel je dvojka. □

Úloha 1.3. *Součin čtyř prvočísel je o osm menší než dvojnásobek součtu jejich druhých mocnin. Najděte tato prvočísla.*

Řešení. Sestavíme rovnici: $abcd + 8 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. Jistě $abcd$ musí být sudé, tedy jedno prvočíslo je dvojka, nechť je to a. Po dosazení dostáváme

$$bcd = b^2 + c^2 + d^2. \tag{1.1}$$

Podívejme se na zbytky po dělení třemi. Zbytek samotného čísla může být 0, 1 nebo -1, proto zbytek druhé mocniny je 0 nebo 1 (protože $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$). Rozeberme nyní tři možnosti: 1. Pokud žádné z čísel není dělitelné třemi, pak je pravá strana rovnice (1.1) dělitelná třemi a levá není, což je spor. 2. Pokud máme jedno nebo dvě čísla dělitelná třemi, pak je levá strana (1.1) dělitelná třemi, ale pravá strana nikoli, což je opět spor. 3. Pokud jsou všechna tři prvočísla dělitelná třemi, pak jsou to trojky a rovnost (1.1) je splněna. Jediným řešením je tedy čtveřice $2, 3, 3, 3$. □

2 Návodné úlohy — odhady

V některých rovnicích je vidět, že funkce (jedné nebo více proměnných) na levé straně rovnice roste rychleji než funkce na pravé straně rovnice. Např. pro velká čísla platí, že součin čísel je větší než jejich součet, součet pátých mocnin je větší než součet druhých mocnin a podobně. U takových rovnic je možné udělat odhady, a dojít k tomu, že řešení budou menší než nějaká mez. Pak už třeba stačí vyzkoušet několik možností, abychom našli všechna řešení. Ukážeme si na několika úlohách, jak takové odhady dělat.

Úloha 2.1. *Součin tří přirozených čísel je o 15 větší než jejich součet. Ukažte, že aspoň jedno z čísel je menší nebo rovné dvěma.*

Řešení. Sestavme rovnici: $abc = a + b + c + 15$. Předpokládejme pro spor, že jsou všechna tři čísla větší než dva a chceme ukázat, že levá strana rovnice pak bude nutně větší než pravá strana. Předpokládejme bez újmy na obecnosti $a \geq b \geq c \geq 3$. Pravou stranu můžeme odhadnout $a + b + c + 15 \leq 3a + 15$ (využijeme, že a je největší ze tří čísel). Levou stranu chceme odhadnout zdola tak, aby nám zmizelo b a c. Využijeme tedy toho, že b, $c \geq 3$ a získáme $abc \geq 9a$. Dohromady máme $9a \leq abc = a + b + c + 15 \leq 3a + 15$, tj. $6a \leq 15$, což je ale spor s $a \geq 3$. □

Úloha 2.2. *Součin několika přirozených čísel větších než jedna je roven dvacetinásobku jejich součtu. Dokažte, že čísel je nejvýše osm.*

Řešení. Máme rovnici $20(a_1 + \cdots + a_k) = a_1 \ldots a_k$. Chceme ukázat, že je-li čísel hodně, pak bude pravá strana nutně větší než levá strana.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_k \geq \cdots \geq a_1 \geq 2$. Pak $20(a_1 + \cdots + a_k) \leq 20ka_k$ a $a_1 \ldots a_k \geq 2^{k-1}a_k$, tedy

$$20k \geq 2^{k-1}. \tag{2.1}$$

Je třeba dokázat, že tato nerovnost není splněna pro žádné k větší než osm. Vidíme, že pro $k = 9$ nerovnost neplatí, a tím spíš nebude platit pro žádné větší k, protože pravá strana nerovnosti roste rychleji. Přesněji, s využitím matematické indukce: pokud pro nějaké $k \geq 9$ platí $20k < 2^{k-1}$, pak pro $k + 1$ máme

$$20(k+1) = 20k\frac{k+1}{k} < 20k \cdot 2 < 2^{k-1} \cdot 2 = 2^k,$$

tj. $20(k+1) < 2^{(k+1)-1}$. Tím je důkaz hotov. □

3 Složitější úlohy

Než se začneme zabývat složitějšími úlohami, uveďme trochu teorie. Pro snažší vyjadřování zavedeme značení $a \equiv b \mod z$, což čteme „a je kongruentní s b modulo z“ a znamená to, že a a b mají po vydělení číslem z stejné zbytky. Např. $a \equiv 1 \mod 2$ znamená, že a je liché. Kongruence nám mohou velmi zjednodušit počítání (především u složitějších úloh), pokud si uvědomíme, že platí:

Věta 3.1. *Pokud celá čísla a, b, c, d a přirozené číslo z splňují $a \equiv b \mod z$ a $c \equiv d \mod z$, pak také platí*

- $a + c \equiv b + d \mod z$,
- $a - c \equiv b - d \mod z$,
- $ac \equiv bd \mod z$ *a*
- $a^k \equiv b^k \mod z$ *pro každé přirozené číslo k.*

Jako třešničku na dortu zde uvedeme tzv. Malou Fermatovu větu a její důsledek:

Věta 3.2. *Je-li p prvočíslo, pak pro libovolné přirozené číslo a platí $a^p \equiv a \mod p$.*

Důsledek 3.3. *Je-li p prvočíslo a přirozené číslo a není násobkem p, pak platí $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.*

Důkazy výše uvedených tvrzení a další fakta o kongruencích a dělitelnosti, jakož i úlohy na procvičování můžete najít například ve dvou textech uvedených níže v sekci Literatura.

Úloha 3.4. *Najděte všechny dvojice přirozených čísel, pro něž je splněna rovnost* $a^4 + b^4 = 650ab + 2500$.

Řešení. Protože pravá strana je dělitelná padesáti, budeme zkoumat dělitelnost mocninami dvojky a pětky. Začněme dělitelností dvěma. Pravá strana je jistě sudá, tj. obě čísla a, b mají stejnou paritu. Kdyby byla obě čísla sudá, je levá strana dělitelná šestnácti, ale pravá strana není dělitelná osmi (protože $650ab$ je dělitelné osmi a 2500 nikoli). Tedy obě čísla musí být lichá. Pravá strana je určitě dělitelná pěti. Uvědomme si, že a^4 a b^4 dávají po dělelní pěti vždy zbytek 1 nebo 0. To plyne buď ihned z důsledku Malé Fermatovy věty, nebo si to lze rozmyslet pomocí kongruencí: Je-li $a \equiv \pm 1 \pmod 5$, pak $a^4 \equiv (\pm 1)^4 \equiv 1 \pmod 5$ a je-li $a \equiv \pm 2 \pmod 5$, pak $a^4 \equiv (\pm 2)^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$ a evidentně pokud $5 \mid a$, pak také $5 \mid a^4$. Tedy levá strana rovnice je dělitelná pěti, jen pokud jsou obě čísla dělitelná pěti. Označme nyní $a = 5c$, $b = 5d$, c, d jsou lichá. Vydělíme celou rovnici číslem 5^4 a získáme $c^4 + d^4 = 26cd + 4$.

Nyní si uvědomíme, že hledaná čísla nemohou být moc velká, protože pak by levá strana byla o hodně větší než pravá strana. Zkusme provést odhady. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $c \leq d$. Pak $c^4 + d^4 \geq d^4$ a $26cd + 4 \leq 26d^2 + 4$. Dohromady máme $d^4 \leq 26d^2 + 4$, neboli $d^2(d^2 - 26) \leq 4$. Tedy $d \leq 5$ a c, d mohou nabývat pouze hodnot 1, 3, 5. Nyní stačí vyzkoušet šest možností $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(5, 5)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 5)$ a zjistíme, že vyhovuje jen dvojice $(1, 3)$. Všechna řešení původní rovnice jsou dvojice $(5, 15)$ a $(15, 5)$. $\square$

Kdybychom nechtěli zkoušet šest možností, můžeme ještě jednou použít dělitelnost pěti: pokud by některé z čísel c, d byla pětka, pak $26cd + 4 \equiv 4 \pmod 5$, ale $c^4 + d^4$ je kongruentní s 0 nebo 1 (jak už jsme zjistili výše pro a, b). Žádné z čísel c, d tedy nemůže být pětka. Pak je ale $c^4 + d^4 \equiv 2 \pmod 5$ a odtud plyne, že $26cd \equiv 3 \pmod 5$, tj. $cd \equiv 3 \pmod 5$ (protože $26 \equiv 1 \pmod 5$), čemuž ze zbývajících tří dvojic vyhovuje jen $(1, 3)$.

Úloha 3.5. *Ukažte, že rovnice* $a^5 + b^5 + c^5 = 5(a + b + c)^2$ *nemá prvočíselné řešení.*

Řešení. Opět si všimneme, že kdyby čísla a, b, c byla velká, bude levá strana o hodně větší než pravá strana. Předpokládejme tedy bez újmy na obecnosti, že $a \geq b \geq c \geq 2$ a odhadujme nejprve levou a pak pravou stranu:

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^5 + 32 + 32, \quad 5(a+b+c)^2 \leq 5(3a)^2 = 45a^2.$$

Dohromady máme $a^5 + 64 \leq 45a^2$, tj. $64 \leq a^2(45 - a^3)$ a tedy $a \leq 3$ (pro $a \geq 4$ bude pravá strana poslední nerovnosti záporná). Všechna tři čísla jsou tudíž dvojky nebo trojky. Nyní stačí rozebrat čtyři možnosti, nebo si všimneme, že dle Malé Fermatovy věty dává levá strana rovnice po dělení pěti zbytek $a+b+c$ a pravá strana je dělitelná pěti, tedy $a+b+c$ je dělitelné pěti. To ale není možné, protože $6 = 2+2+2 \leq a+b+c \leq 3+3+3 = 9$. □

Ve skutečnosti jsme ukázali, že daná rovnice nemá řešení v přirozených číslech větších než jedna, jiné vlastnosti prvočísel jsme v řešení nepoužili.

Úloha 3.6. *Určete všechny dvojice prvočísel a, b pro něž*

$$2^b + 3^b + 7^b = ab.$$

Řešení. Malá Fermatova věta říká, že výraz na levé straně dává po dělení prvočíslem b zbytek $2+3+7 = 12$. Protože pravá strana rovnice je dělitelná b, máme $b \mid 12$, tj. $b = 2$ nebo $b = 3$. Pro $b = 2$ snadno dopočítáme $4+9+49 = 2a$, tj. $a = 31$. Pro $b = 3$ máme $8+27+7\cdot 49 = 3a$, kde levá strana je $35 + 7\cdot 49 = 7\cdot 54$, tj. $a = 7\cdot 18$, což ale není prvočíslo. Jediným řešením je tedy $a = 31$, $b = 2$. □

Literatura

[1] F. Veselý: *O dělitelnosti čísel celých.* Mladá fronta, Praha, 1966. `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403560`

[2] J. Svoboda, Š. Šimsa: *Seriál – Teorie čísel I, II, III.* 33. ročník matematického korespondenčního semináře, `http://mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf`

VÝŠKY A OSY STRAN V TROJÚHELNÍKU

Zbyněk Šír

Mnoho geometrických úloh se týká význačných přímek a bodů v trojúhelníku. Takovou úlohou je i 70-A-I-2 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

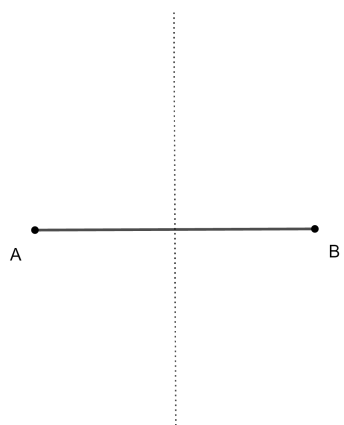
V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží na straně BC body D a E tak, že D je mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je takový bod, že $FD||AB$ a $FE||AC$. Dokažte, že $|FB| = |FC|$.

V tomto příspěvku se pokusíme čtenáře motivovat k možnému synthetickému i analytickému řešení této úlohy. Naším východiskem budou přitom především různé důkazy známé poučky o společném průsečíku výšek v trojúhelníku.

1 Osy stran

Pojmem, který je možno nejsnadněji uchopit, je *osa strany*. Následující popis je triviální, ale užitečný a zajímavý z hlediska budování matematiky.

Definice 1.1. *Osa úsečky AB je přímka, která prochází jejím středem a je na ni kolmá.*



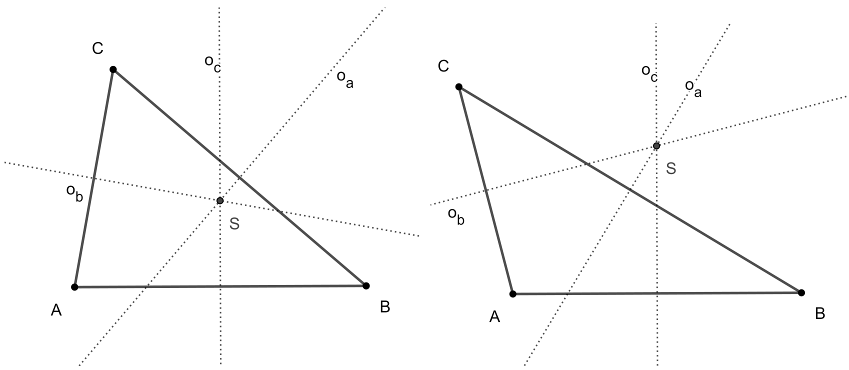
Je velice zajímavé, že tento pojem využívající v podstatě jen kolmosti nám přímo popíše významnou množinu bodů.

Lémma 1.2. *Mějme dány dva různé body A a B. Pro libovolný bod C platí, že je od obou stejně vzdálen, tedy $|AC| = |BC|$, právě tehdy, když leží na ose úsečky AB.*

Zdůrazněme, že tvrzení má tvar ekvivalence, což se může v různých úlohách hodit. Jinými slovy, osa úsečky je právě ta množina bodů, které mají stejnou vzdálenost.

Toto jednoduché lémmátko nebudeme formálně dokazovat. Bylo by to možné z některých jednoduchých vět v Eukleidových *Základech*, pomocí Pýthagorovy věty či analyticky. Ve skutečnosti ale toto tvrzení, které dává do souvislosti kolmost a rovnost vzdáleností, patří do samých základů a východisek geometrie. Mohlo by být považováno za zjevný postulát.

Věta 1.3. *V libovolném trojúhelníku ABC se osy stran AB, BC a CA protínají právě v jednom bodě.*

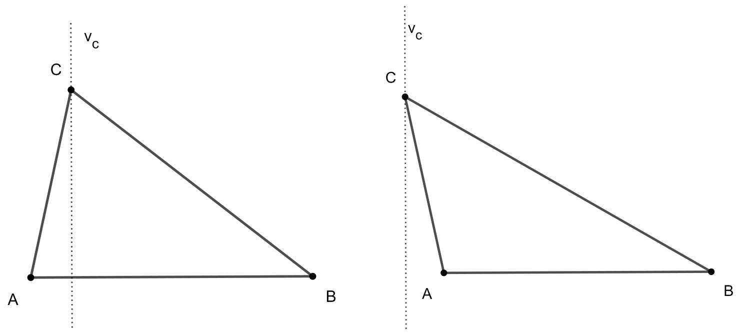


Důkaz. Osy o_a a o_b nemohou být rovnoběžné (protože v trojúhelníku nejsou rovnoběžné úsečky BC a CA), a proto se protnou v bodě, který označíme S. Protože $S \in o_a$ platí $|BS| = |CS|$. Protože $S \in o_b$ platí $|AS| = |CS|$. V důsledku tedy i $|AS| = |BS|$ a tedy $S \in o_c$. □

2 Výšky

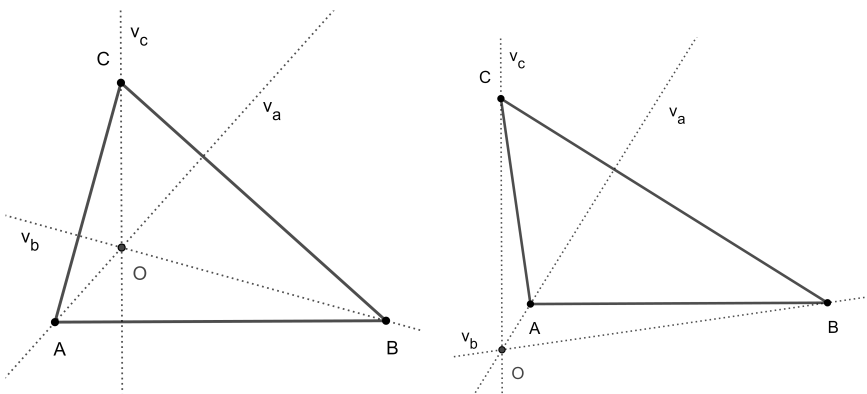
Nyní pokročíme k poněkud obtížnějšímu pojmu výšky.

Definice 2.1. *Výška v trojúhelníku je přímka vedená libovolným ze tří vrcholů a kolmá na protilehlou stranu. Trojúhelník má tedy vždy tři výšky.*

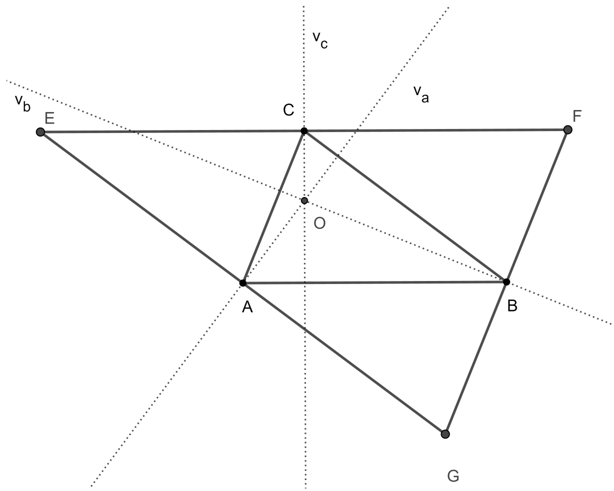


Pokud má někdo ze čtenářů to štěstí, že důkaz následujícího tvrzení nikdy neviděl, velice doporučuji pokusit se důkaz samostatně vymyslet. Ukazuje se, že bez znalosti jistého triku nebo bez použití analytických výpočtů to není jednoduché. My si však ukážeme dva důkazy, které se právě o uvedené prostředky opírají. Děláme to zejména proto, že jsou vhodnou motivací k podobným řešením soutěžní úlohy.

Věta 2.2. *V libovolném trojúhelníku ABC se tři výšky protínají právě v jednom bodě.*



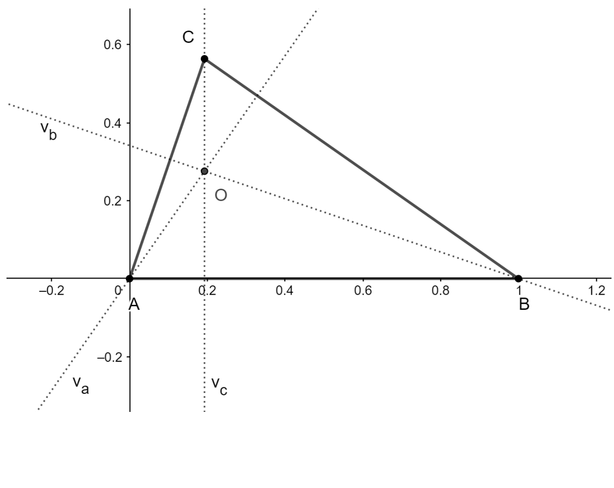
Důkaz. První důkaz je čistě synthetický. Každým vrcholem vedeme rovnoběžku s protější stranou (tedy kolmici na výšku). Tyto tři nové přímky jsou vzájemně různoběžné a protnou se v bodech nového trojúhelníku FEG.



Výšky původního trojúhelníku ABC jsou osami stran nového trojúhelníku FEG a proto se protínají v jednom bodě podle Věty 1.3.

Druhý důkaz je čistě analytický. Je přitom důležité dobře si promyslet, kolik vstupních parametrů budeme používat. Na první pohled jich je 6, totiž x-ové a y-ové souřadnice bodů $A[a_x, a_y]$, $B[b_x, b_y]$, $C[c_x, c_y]$. S jejich pomocí bychom si mohli vyjádřit rovnice výšek, a pak ukázat, že se protnou v jednou bodě.

Ve skutečnosti ale můžeme trojúhleník posunout a otočit tak, že bod A je v počátku, tedy $a_x = a_y = 0$, a navíc bod B leží na kladné části osy x, tedy $b_x > 0$ a $b_y = 0$. To bychom odborně nazvali nezávislostí (invariancí) dokazované věty vůči shodnostem. Navíc se vlastnost zachová, když trojúhelník zvětšíme nebo zmenšíme (nezávislost na podobnostech). Proto můžeme volit $b_x = 1$.



Celkově tedy můžeme předpokládat polohu bodů $A[0,0]$, $B[1,0]$ a $C[c_x, c_y]$, pracujeme tedy jen se dvěma parametry. Obecná rovnice v_c je zřejmě $x = c_x$. Směrový vektor výšky v_b musí být kolmý na vektor $\overrightarrow{AC} = (c_x, c_y)$ a tedy je to například vektor $(-c_y, c_x)$. Tím získáme parametrické vyjádření přímky v_b

$$v_b: \quad x = 1 - t\,c_y, \quad y = 0 + t\,c_x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro průsečík s v_c musí tedy platit $c_x = 1 - t\,c_y$ čímž dostáváme $t = \frac{1-c_x}{c_y}$ (c_y je totiž nenulové, jinak by se nejednalo o trojúhelník), a tedy pro průsečík dvou výšek platí

$$O = v_c \cap v_b = \left[c_x, \frac{c_x - c_x^2}{c_y}\right].$$

K tomu, abychom ukázali, že i třetí výška v_a prochází bodem O postačí, že vektory $\overrightarrow{AO}$ a $\overrightarrow{BC}$ jsou kolmé. To však snadno ověříme skalárním součinem, protože

$$\overrightarrow{AO} = \left(c_x, \frac{c_x - c_x^2}{c_y}\right), \quad \overrightarrow{BC} = (c_x - 1, c_y).$$

$\square$

3 Dvě úlohy na závěr

Náš příspěvek zakončíme dvěma úlohami k samostatnému řešení.

Úloha 3.1. *Mějme trojúhelník ABC s výškami v_a, v_b a v_c a jejich patami P_a, P_b a P_c. Dokažte, že v_a, v_b a v_c jsou osami úhlů trojúhelníku $P_aP_bP_c$.*

Úloha 3.2. *Mějme trojúhelník ABC s výškami v_a, v_b a v_c a jejich průsečíkem O. Nechť X je bod osově souměrně sdružený s O podle přímky AB a Y středově souměrně sdružený s O podle středu strany AB. Dokažte, že X i Y leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.*

Literatura

[AG] M. Kočandrle, L. Boček: *Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie*, Prometheus 2009.

[EG] E. Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, American Mathematical Society, 2016.

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

RŮZNÁ ČÍSLA, KONSTRUKCE A ODHADY

Marian Poljak

Při práci s obecnými reálnými čísly může být užitečné mít povědomí o tom, které výrazy se rovnají za jakých podmínek. V domácím kole matematické olympiády je zadána následující úloha 70-A-I-3.

Mějme navzájem různá kladná reálná čísla a, b, c. Určete nejmenší možný počet různých hodnot mezi výrazy $a + b$, $b + c$, $c + a$, ab, bc, ca, abc.

V tomto textu se budeme zabývat úlohami s podobnou tematikou.

Nejdříve je třeba si uvědomit, o co v dané úloze jde. Chce se po nás, abychom určili nejmenší počet různých hodnot mezi sedmi výrazy, které jsou složené z proměnných a, b, c. Úlohy tohoto typu, kde chceme najít minimum či maximum nějaké veličiny, mají obvykle dvě části, odhad a konstrukci. V našem případě je třeba dokázat, že „méně než tolik hodnot to určitě být nemůže“. Konstrukcí potom je nějaké chytré určení proměnných a, b, c, které tohoto vytouženého minima opravdu dosahují. Je na nás, který z těchto kroků provedeme jako první, pro správné řešení jsou ale potřeba oba.

Důležité jsou i podmínky na různost a kladnost čísel a, b, c. Kdybychom je pro rozcvičku vypustili a úlohu řešili bez nich, řešení by bylo nasnadě: nastavením $a = b = c = 0$ by měly všechny výrazy hodnotu 0, odpověď je tedy 1, protože méně to zřejmě být nemůže.

1 Konstrukce různých čísel

Jak problémy tohoto rázu řešit ilustrujeme úlohou zadanou v Matematickém korespondenčním semináři.

Úloha 1.1. *Mějme n-prvkovou množinu různých kladných reálných čísel $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dokažte, že pokud u každé možné neprázdné podmnožiny A sečteme její prvky, dostaneme alespoň $\frac{1}{2}n(n+1)$ různých čísel.*

Řešení. Zkonstruujeme postupně podmnožiny množiny A, které mají jistě různé součty. Pro přehlednost si můžeme čísla v množině bez újmy na obecnosti seřadit a předpokládat $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$. Nejdříve si můžeme vzít jednoprvkové podmnožiny – zde máme různost součtů zaručenu, protože čísla v množině jsou ze zadání různá. Máme tedy n podmnožin, jak ale pokračovat?

Můžeme vzít ty dvouprvkové podmnožiny, které obsahují největší číslo v množině A, tedy a_1. To jsou množiny $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \ldots, \{a_1, a_n\}$, je jich $n - 1$ a opět máme zaručeno, že součty v těchto množinách budou navzájem různé – vždy se budou lišit tím menším ze dvou čísel. Navíc, jelikož je v každé z nich obsaženo největší číslo množiny A, máme zaručeno, že každá dvouprvková množina bude mít větší součet než libovolná již vybraná jednoprvková množina. Dvouprvková množina s nejmenším součtem je $\{a_1, a_n\}$ a $a_1 + a_n$ je ostře větší než součet jednoprvkové množiny $\{a_1\}$ obsahující největší prvek. Zde využíváme podmínku, že čísla v množině A jsou kladná, jinak by předchozí věta neplatila.

Tímto způsobem můžeme pokračovat. Ve třetím kroku například vybereme všechny trojice, které obsahují dvě největší čísla a_1, a_2, bude jich $n - 2$. Nakonec vybereme celou množinu všech n čísel, která je také její podmnožinou. Obecně v k-tém kroku vybereme všechny k-tice čísel, ve kterých je zahrnuto $k - 1$ největších čísel množiny A, a bude jich $n - k + 1$. Z předchozích úvah již víme, že libovolná množina vybraná v k-tém kroku má větší součet než libovolná množina vybraná v předchozím kroku, navíc máme zaručenu i jejich různost při jednom daném kroku.

Dohromady jsme vybrali $n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$ čísel a tato známá suma se rovná $\frac{1}{2}n(n + 1)$, tvrzení z úlohy je tedy dokázáno. $\square$

Vidíme, že v této úloze byl vyžadován jen odhad, aneb že „alespoň $\frac{1}{2}n(n + 1)$ různých hodnot být musí“. Zde je však snadné najít i konstrukci, která tohoto odhadu dosahuje. Nastavením $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ zajistíme, že největší součet podmnožiny bude $\frac{1}{2}n(n + 1)$, libovolný součet podmnožiny je tedy celé číslo od 1 do $\frac{1}{2}n(n + 1)$, kterých je nanejvýš právě $\frac{1}{2}n(n + 1)$, nastane tedy rovnost. Lze zvolit i libovolnou jinou aritmetickou posloupnost.

2 Různost v rovnicích

V soustavách rovnic nám různost proměnných také může pomoci, zpravidla díky ní můžeme určit nenulovost nějakých výrazů, což ilustruje následující úloha.

Úloha 2.1. *Pro navzájem různá nenulová čísla a, b, c platí*

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}\,.$$

Dokažte, že $|abc| = 1$.

Řešení. Ekvivalentní úpravou rovnic dostaneme následující vztahy:

$$a - b = \frac{b - c}{bc},$$

$$b - c = \frac{c - a}{ca},$$

$$a - c = \frac{b - a}{ab}.$$

Jejich vynásobením dostaneme rovnici

$$(a - b)(b - c)(a - c) = \frac{(c - a)(b - c)(b - a)}{a^2b^2c^2}\,.$$

Jelikož jsou čísla a, b, c navzájem různá, jsou jejich rozdíly nenulové, můžeme tedy krátit a rovnici převést do tvaru $1 = a^2b^2c^2$, ze které již přímo vyplývá $|abc| = 1$. $\square$

O EXTREMÁLNÍCH DĚLITELÍCH

Matěj Doležálek

Jedním z běžných typů úloh v matematických olympiádách jsou ty, jež zkoumají množinu dělitelů daného přirozeného čísla n, případně její mohutnost nebo některé její „malé“ či naopak „velké“ prvky. Patří mezi ně i úloha 70-A-I-4, jejíž zadání je následující:

Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho superdělitelem.

(i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.

(ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2020.

V tomto příspěvku ukážeme některé užitečné postupy v řešení podobných úloh. Typicky budeme nějak využívat rozklad na prvočinitele a počty dělitelů čísel zastoupených v úloze. Často také nějak rozebereme možné podoby „malých“ dělitelů, neboť ti, jak uvidíme, mohou sami mít jenom „málo“ dělitelů (a tedy i „málo“ prvočíselných dělitelů). V některých úlohách se také vyplatí rozlišit několik případů a řešit každý jednotlivě.

1 Teorie

Definice 1.1. *Pro přirozená čísla a, b řekneme, že a* dělí *b, pokud existuje přirozené c tak, že $b = ac$. Tuto skutečnost pak značíme $a \mid b$ a dále říkáme, že a je* dělitelem *b a naopak b je* násobkem *a. Přirozené číslo $p > 1$ nazveme* prvočíslem*, pokud jsou jeho děliteli pouze 1 a p.*

V celém příspěvku se budeme držet následujícího značení: pracujme s přirozeným číslem $n > 1$ a jeho děliteli (včetně 1 a n samotného), které seřadíme v rostoucí posloupnost

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n. \tag{1.1}$$

Dále využijeme toho, že každé přirozené číslo lze jednoznačně (až na pořadí) rozložit na součin prvočísel. Budeme tedy uvažovat rozklad

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}, \tag{1.2}$$

kde p_i jsou po dvou různá prvočísla a e_i jsou přirozená čísla ($1 \leq i \leq r$).

Nejprve nahlédněme, jak vypadá množina dělitelů n.

Tvrzení 1.2. *Přirozené číslo d je dělitelem čísla n s prvočíselným rozkladem $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$, právě pokud*

$$d = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r},$$

kde a_i jsou nezáporná celá čísla splňující $0 \leq a_i \leq e_i$.

Důkaz. Je zřejmé, že všechna taková d vskutku dělí n, neboť potom

$$n = d \cdot \left(p_1^{e_1-a_1} \cdot p_2^{e_2-a_2} \cdots p_r^{e_r-a_r}\right).$$

Naopak nechť je d dělitelem n – to znamená, že $d \cdot c = n$ pro nějaké přirozené c. Kdyby d bylo násobkem prvočísla různého od všech $p_1, \ldots, p_r$, pak by se nyní toto prvočíslo muselo vyskytnout i v rozkladu n jakožto násobku d, což by byl spor. Podobně kdyby se některé p_i v rozkladu d vyskytovalo s exponentem $a_i > e_i$, pak by se v rozkladu n jakožto násobku d muselo vyskytovat s exponentem alespoň $a_i > e_i$, což by byl také spor. □

Označme symbolem $\tau(m)$ počet dělitelů přirozeného čísla m; při značení (1.1) je $k = \tau(n)$. Pak z předchozího tvrzení jednoduše plyne:

Důsledek 1.3. *Počet dělitelů čísla n s prvočíselným rozkladem* (1.2) *je určen vztahem*

$$k = \tau(n) = (e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdots (e_r + 1).$$

Důkaz. Ve značení tvrzení 1.2 je d jednoznačně určeno r-ticí $(a_1, \ldots, a_r)$. Přitom jednotlivá a_i lze volit nezávisle a na výběr každého a_i máme e_i+1 možností $0, 1, \ldots, e_i$, což celkem dá přesně $(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdots (e_r + 1)$ možností. □

Cvičení 1.4. *Jsou-li m, n nesoudělná přirozená čísla, pak*

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n).$$

Návod. Nesoudělná čísla nemají žádné společné prvočinitele ve svém rozkladu.

Zaměřme se nyní na pořadí dělitelů v posloupnosti $d_1, \ldots, d_k$. To, že $d \mid n$, znamená, že $d \cdot c = n$ pro nějaké přirozené c. Potom je ale i $c = \frac{n}{d}$ dělitelem n. V posloupnosti

$$\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k} \tag{1.3}$$

se tak vyskytují opět dělitelé n. Je zřejmé, že takto se různí dělitelé zobrazují opět na různé dělitele, takže v posloupnosti (1.3) máme opět všechny dělitele. Navíc platí $d_i < d_j$, právě pokud $\frac{n}{d_i} > \frac{n}{d_j}$. Z toho plyne, že (1.3) je jenom posloupností $d_1, \ldots, d_k$ v obráceném pořadí, neboli jsme dokázali:

Tvrzení 1.5. *Pro každé $1 \leq i \leq k$ platí: $d_{k+1-i} = \frac{n}{d_i}$.*

Z tohoto tvrzení plyne, že „malí“ dělitelé (tedy ti „na začátku“ posloupnosti $\{d_i\}_{i=1}^k$) a „velcí“ dělitelé (ti „u konce“ posloupnosti $\{d_i\}_{i=1}^k$) jsou spolu jednoduše provázáni.

Cvičení 1.6. *Pro každé přirozené číslo n platí: $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.*

Návod. Když $ab = n$, $0 < a \leq b$, pak $a \leq \sqrt{n}$.

Typicky se pak vyplatí pracovat spíše s „malými“ děliteli, neboť u nich často dovedeme využít odhady na jejich počet dělitelů či prvočíselných dělitelů (což vypovídá o „složitosti“ jejich prvočíselného rozkladu).

Tvrzení 1.7. *Druhý nejmenší dělitel d_2 čísla n je vždy prvočíslo.*

Důkaz. Nechť je pro spor d_2 složené číslo. Potom má nějakého dělitele d splňujícího $1 < d < d_2$. Přitom ale určitě $d \mid d_2 \mid n$, takže d se musí vyskytovat v posloupnosti $d_1, \ldots, d_k$. Přitom ale $d_1 = 1 < d < d_2$, takže musí ležet přímo mezi dvěma po sobě jdoucími členy této rostoucí posloupnosti, což je spor. Určitě tak d_2 musí být prvočíslo. $\square$

Tuto jednoduchou myšlenku lze snadno zobecnit: každý dělitel d nějakého d_i je sám dělitelem n a určitě platí $d \leq d_i$. Z toho tedy plyne:

Tvrzení 1.8. *i-tý nejmenší dělitel d_i čísla n splňuje $\tau(d_i) \leq i$.*

Na základě tohoto také dovedeme odhadnout počet prvočíselných dělitelů d_i. Nechť má d_i dohromady s různých prvočíselných dělitelů. Pak podle důsledku 1.3 je $\tau(d_i)$ součinem s činitelů, z nichž každý je alespoň $1 + 1 = 2$, takže dohromady $\tau(d_i) \geq 2^s$. Když toto skloubíme s tvrzením 1.8, dostaneme, že $i \geq 2^s$, neboli:

Důsledek 1.9. *i-tý nejmenší dělitel d_i čísla n má nanejvýš $\log_2(i)$ prvočíselných dělitelů.*

2 Úlohy

Ve všech úlohách používáme značení (1.1).

Úloha 2.1. *Najděte všechna přirozená čísla n taková, že $k = \tau(n) \geq 7$ a platí $d_5 - d_3 = 50$ a zároveň $11d_5 + 8d_7 = 3n$.* *(63-A-III-1)*

Řešení. Ukážeme, že jediným takovým n je $n = 2013$. Rozlišme dva případy podle parity n:

(i) Nechť je n sudé. Potom určitě $d_2 = 2$. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ je i $11d_5$ sudé, tedy d_5 je sudé. Z rovnosti $d_5 - d_3 = 50$ tak je sudé i d_3. Přitom z důsledku 1.9 má d_3 jen jednoho prvočíselného dělitele, takže už musí být mocninou dvojky, z čehož $d_3 = 4$. Následně $d_5 = 50 + d_3 = 54 = 2 \cdot 3^3$, což znamená $\tau(d_5) = (1+1) \cdot (3+1) = 8$, což je spor s tvrzením 1.8. Žádné sudé n tak nemůže být řešením úlohy.

(ii) Nechť je n liché – potom jsou určitě liší i všichni jeho dělitelé. Všechna d_i dělí n, takže z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ určitě d_5 dělí číslo

$$3n - 11d_5 = 8d_7.$$

Z lichosti d_5 pak už určitě plyne, že $d_5 \mid d_7$. Obdobně d_7 dělí číslo $3n - 8d_7 = 11d_5$. Máme tedy $d_7 = x \cdot d_5$ pro nějaké přirozené $x > 1$ a následně $xd_5 \mid 11d_5$, neboli $x \mid 11$. Jelikož 11 je prvočíslo, plyne z tohoto $x = 11$, a tedy $d_7 = 11d_5$. Když toto dosadíme do $11d_5 + 8d_7 = 3n$, obdržíme $99d_5 = 3n$, neboli $n = 33d_5$.

Toto nám dává dělitele 1, 3, 11 a 33. Z rovnosti $d_5 = 50 + d_3$ je $d_5 > 50 > 33$, takže už určitě musí být

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 3, \quad d_3 = 11, \quad d_4 = 33.$$

Dosazením $d_3 = 11$ pak máme $d_5 = 50 + 11 = 61$, z čehož

$$n = 33 \cdot 61 = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013.$$

Snadno již ověříme, že toto n vyhovuje zadání. □

Úloha 2.2. *Nechť je n násobek pěti takový, že $\tau\left(\frac{8}{5}n\right) = \frac{8}{5}\tau(n)$. Dokažte, že potom i $25 \mid n$ a určete hodnotu podílu $\tau\left(\frac{4}{25}n\right) : \tau(n)$.* *(48-A-I-4)*

Řešení. Násobení n čísly $\frac{8}{5}$ a $\frac{4}{25}$ mění v prvočíselném rozkladu pouze exponenty u 2 a 5, zapišme tedy

$$n = 2^a 5^b n_0$$

pro nezáporné celé a, přirozené b a přirozené číslo n_0 nesoudělné s 2 i s 5. Zadanou rovnici pak s pomocí důsledku 1.3 a cvičení 1.4 přepíšeme jako

$$\begin{aligned}
\tau\left(2^{a+3}5^{b-1}n_0\right) &= \frac{8}{5}\tau\left(2^a5^bn_0\right),\\
(a+4)\cdot b\cdot\tau(n_0) &= \frac{8}{5}\cdot(a+1)\cdot(b+1)\cdot\tau(n_0),\\
5(a+4)b &= 8(a+1)(b+1),\\
0 &= 3ab+8a-12b+8,\\
(3b+8)(4-a) &= 40.
\end{aligned}$$

Na levé straně je nyní $3b+8$ zřejmě kladné, takže i $4-a$ je kladné a menší nebo rovné 4. Stačí nám tedy uvažovat rozklady

$$40 = 1\cdot 40 = 2\cdot 20 = 4\cdot 10.$$

Když ještě využijeme toho, že $3b+8$ musí dávat zbytek 2 po dělení třemi, zbude jako jediná možnost $(4-a, 3b+8) = (2, 20)$, z čehož $(a, b) = (2, 4)$.

Díky $b = 4 \geq 2$ musí platit $5^2 \mid 5^b \mid n$. Snadno také spočteme

$$\frac{\tau\left(\frac{4}{25}n\right)}{\tau(n)} = \frac{\tau\left(2^4\cdot 5^2\cdot n_0\right)}{\tau\left(2^2\cdot 5^4\cdot n_0\right)} = \frac{5\cdot 3\cdot\tau(n_0)}{3\cdot 5\cdot\tau(n_0)} = 1. \qquad \square$$

Úloha 2.3. *Najděte všechna přirozená čísla n taková, že $k = \tau(n) \geq 6$ a platí $n = d_5^2 + d_6^2$.* *(Česko-polsko-slovenské střetnutí 2019)*

Řešení. Ukážeme, že jediným takovým n je $n = 500$. Nejprve nahlédněme, že n je sudé. Nechť pro spor není – potom jsou i všichni jeho dělitelé liší, tedy $n = d_5^2 + d_6^2$ je jakožto součet dvou lichých čísel sudé, což je spor. Tedy n je sudé. Dále, kdykoliv prvočíslo p dělí d_5, pak dělí i n, tedy i $d_6^2 = n - d_5^2$, neboli $p \mid d_6$. Obdobně každé prvočíslo, jež dělí d_6, dělí také d_5, takže d_5 a d_6 mají totožné množiny prvočíselných dělitelů. Konečně z důsledku 1.9 je tato (společná) množina prvočíselných dělitelů nanejvýš dvouprvková. Rozlišme tedy dva případy:

(i) d_5 i d_6 mají jen jednoho prvočíselného dělitele, tedy jsou mocninami nějakého p. Jelikož mezi d_5 a d_6 nesmí ležet žádný další dělitel n, nutně platí $d_5 = p^m$ a $d_6 = p^{m+1}$ pro nějaké přirozené m. Kdyby $p > 2$, pak vzhledem k $2 \mid n$ určitě i $2p^m$ dělí n, a přitom $d_5 < 2p^m < d_6$, což je spor. Musí tak platit $p = 2$. Z toho potom

$$n = d_5^2 + d_6^2 = 5\cdot 4^m = 5\cdot 2^{2m}.$$

Díky tomu $\tau(n) = 2(2m+1)$, zároveň určitě $n > d_6$, takže n musí mít alespoň 7 dělitelů. Potom musí m být alespoň 2, neboť jinak by bylo $\tau(n) \leq 6$. Z tohoto vyjádření tak už dovedeme vypsat několik prvních dělitelů n:

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 2, \quad d_3 = 4, \quad d_4 = 5, \quad d_5 = 8, \quad d_6 = 10,$$

což odporuje tomu, že d_6 má být mocnina dvojky. Případ, kdy d_5 i d_6 mají jediného prvočíselného dělitele, tak žádná řešení nedává.

(ii) d_5 i d_6 mají dva prvočíselné dělitele $p < q$. Potom pq dělí d_5 i d_6, díky čemuž i $p^2q^2 \mid d_5^2 + d_6^2 = n$. Vzhledem k $d_5 < d_6$ musí být $d_6 > pq$. Pakliže tedy máme $d_6 = p^a q^b$ pro nějaká přirozená čísla a, b, pak musí alespoň jedno z nich být větší než 1. Z toho

$$\tau(d_6) = (a+1)(b+1) \geq (2+1)(1+1) = 6.$$

Přitom ale d_6 může mít nanejvýš 6 dělitelů (a tito dělitelé jsou zastoupeni mezi děliteli n), takže už musí být přesně $\{a, b\} = \{1, 2\}$ a $d_1, \ldots, d_6$ jsou přesně dělitelé d_6. Z toho musí d_2 jako nejmenší prvočíselný dělitel d_6 být rovno p. Kdyby nyní $d_6 = pq^2$, pak bychom vzhledem k $d_5 \mid d_6$ a z tvrzení 1.5 měli

$$d_5 = \frac{d_6}{d_2} = \frac{pq^2}{p} = q^2,$$

což je spor s tím, že d_5 má dva různé prvočíselné dělitele. Určitě tedy $d_6 = p^2 q$ a $d_5 = \frac{d_6}{d_2} = pq$.

Nyní využijeme toho, že n je sudé – z toho nutně $p = d_2 = 2$. Pak už snadno vyjádříme

$$n = d_5^2 + d_6^2 = 4q^2\left(1 + 2^2\right) = 20q^2.$$

Z toho je číslo 5 dělitelem n a v posloupnosti $\{d_i\}_{i=1}^k$ nemůže mít index vyšší než 5 (triviálně). Zároveň už ale víme, že $d_1, \ldots, d_6$ jsou přesně všichni dělitelé $d_6 = 4q$, neboli

$$\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\} = \{1, 2, 4, q, 2q, 4q\}.$$

Číslo 5 má být prvkem této množiny, takže nutně $q = 5$. Z toho už dostaneme $n = 500$ a snadno ověříme, že toto vyhovuje zadání. □

Literatura

[1] Matematická olympiáda. `www.matematickaolympiada.cz`

[2] J. Svoboda, Š. Šimsa: *Teorie čísel III*. Seriál Matematického korespondenčního semináře, 33. ročník.
`https://prase.cz/archive/33/uvod3s.pdf`

SINOVÁ VĚTA A APOLLÓNIOVA KRUŽNICE

Radovan Švarc

Cílem tohoto textu je ukázat některé techniky, které se používají při důkazech geometrických úloh. V první kapitole budeme zkoumat použití sinové věty. Tu pak v druhé kapitole použijeme k důkazu tvrzení o Apollóniově kružnici. Text je koncipovaný jako pomocný k úloze 70-A-I-5 matematické olympiády, která zní:

V trojúhelníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupně středy jeho stran BC, CA, AB.Dokažte, že pro libovolný bod X různý od bodů S_a, S_b, S_c platí

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_A|}, \frac{|XB|}{|XS_B|}, \frac{|XC|}{|XS_C|}\right\} \leq 2.$$

1 Sinová věta

Následující větu nebudeme dokazovat:

Věta 1.1. *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ, stranami a, b, c a poloměrem kružnice opsané R platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Vedle této věty budeme často využívat vztah $\sin\varphi = \sin(180° - \varphi)$.

Úloha 1.2. *Mějme trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| < |BC|$. Průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC označme P a průsečík osy vnějšího úhlu ABC s přímkou AC označme Q. Dokažte, že*

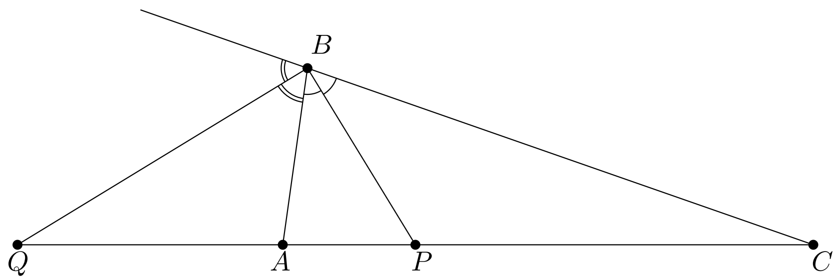
$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{c}{a} = \frac{|AQ|}{|QC|}.$$

Důkaz. Použijeme sinovou větu na trojúhelníky APB a BCP:

$$\frac{|AP|}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle APB|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|CP|}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{|CB|}{\sin|\sphericalangle BPC|}.$$

Jelikož ovšem $|\sphericalangle APB| = 180° - |\sphericalangle BPC|$, je $\sin|\sphericalangle APB| = \sin|\sphericalangle BPC|$. Takže

$$
\begin{aligned}
\frac{|AP|}{|PC|} &= \frac{\sin\frac{\beta}{2}\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle APB|}}{\sin\frac{\beta}{2}\frac{|CB|}{\sin|\sphericalangle BPC|}} \\
&= \frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{\sin|\sphericalangle BQC|}{\sin|\sphericalangle AQB|} \\
&= \frac{|AB|}{|BC|}.
\end{aligned}
$$



Pro bod Q postupujeme analogicky. Platí $|\sphericalangle ABQ| = 90° - \frac{\beta}{2}$ a $|\sphericalangle CBQ| = 90°+\frac{\beta}{2}$. Protože $\sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right)\right) = \sin\left(90° + \frac{\beta}{2}\right)$, je $\sin|\sphericalangle ABQ| = \sin|\sphericalangle CBQ|$. Použijme sinovou větu na trojúhelníky AQB a BCQ:

$$
\frac{|AQ|}{\sin|\sphericalangle ABQ|} = \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle AQB|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|CQ|}{\sin|\sphericalangle CBQ|} = \frac{|CB|}{\sin|\sphericalangle BQC|}.
$$

Zároveň platí $|\sphericalangle AQB| = |\sphericalangle CQB|$. Takže

$$
\begin{aligned}
\frac{|AQ|}{|QC|} &= \frac{\sin|\sphericalangle ABQ|\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle AQB|}}{\sin|\sphericalangle CBQ|\frac{|CB|}{\sin|\sphericalangle BQC|}} \\
&= \frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{\sin|\sphericalangle BQC|}{\sin|\sphericalangle AQB|}\cdot\frac{\sin|\sphericalangle ABQ|}{\sin|\sphericalangle CBQ|} \\
&= \frac{|AB|}{|BC|}.
\end{aligned}
$$
□

Úloha 1.3. *V rovnoběžníku $TUVW$ jsou na stranách TU a UV po řadě body X, Y tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Přímky TY a VX se protínají v bodě P. Dokažte, že P leží na ose úhlu VWT.*

Důkaz. Protože $TUVW$ je rovnoběžník, platí

$$|\sphericalangle WTP| = |\sphericalangle WTY| = |\sphericalangle TYU| = |\sphericalangle PYU| = 180^\circ - |\sphericalangle PYV|.$$

Díky tomu je $\sin|\sphericalangle WTP| = \sin|\sphericalangle VYP|$. Analogicky dostaneme také $\sin|\sphericalangle WVP| = \sin|\sphericalangle TXP|$.

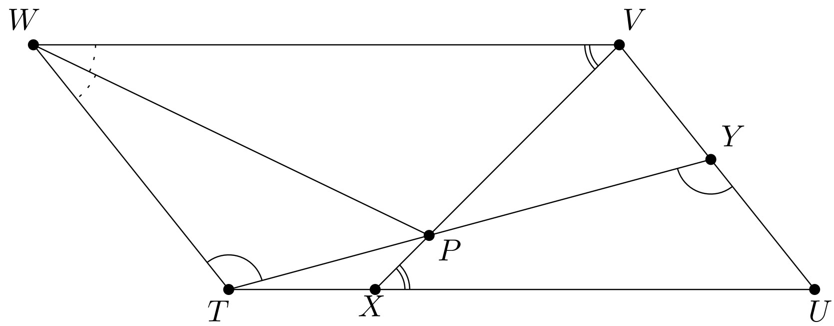
Aplikací sinové věty na trojúhelníky TWP, WPV, TXP a VYP dostaneme vztahy

$$\frac{|WP|}{\sin|\sphericalangle WTP|} = \frac{|TP|}{\sin|\sphericalangle TWP|}$$
$$\frac{|WP|}{\sin|\sphericalangle WVP|} = \frac{|VP|}{\sin|\sphericalangle VWP|}$$
$$\frac{|XT|}{\sin|\sphericalangle XPT|} = \frac{|TP|}{\sin|\sphericalangle TXP|}$$
$$\frac{|YV|}{\sin|\sphericalangle YPV|} = \frac{|VP|}{\sin|\sphericalangle VYP|}.$$

Z těchto vztahů dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\sin|\sphericalangle TWP|}{\sin|\sphericalangle VWP|} &= \frac{\frac{\sin|\sphericalangle WTP|}{|WP|}}{\frac{\sin|\sphericalangle WVP|}{|WP|}} \frac{|TP|}{|VP|} \\
&= \frac{\sin|\sphericalangle WTP|}{\sin|\sphericalangle WVP|} \frac{|TP|}{|VP|} \\
&= \frac{\sin|\sphericalangle VYP|}{\sin|\sphericalangle TXP|} \frac{|TP|}{|VP|} \\
&= \frac{\frac{|TP|}{\sin|\sphericalangle TXP|}}{\frac{|VP|}{\sin|\sphericalangle VYP|}} \\
&= \frac{\frac{|XT|}{\sin|\sphericalangle XPT|}}{\frac{|YV|}{\sin|\sphericalangle YPV|}} \\
&= \frac{|XT|}{|YV|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle YPV|}{\sin|\sphericalangle XPT|} \\
&= 1 \cdot 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

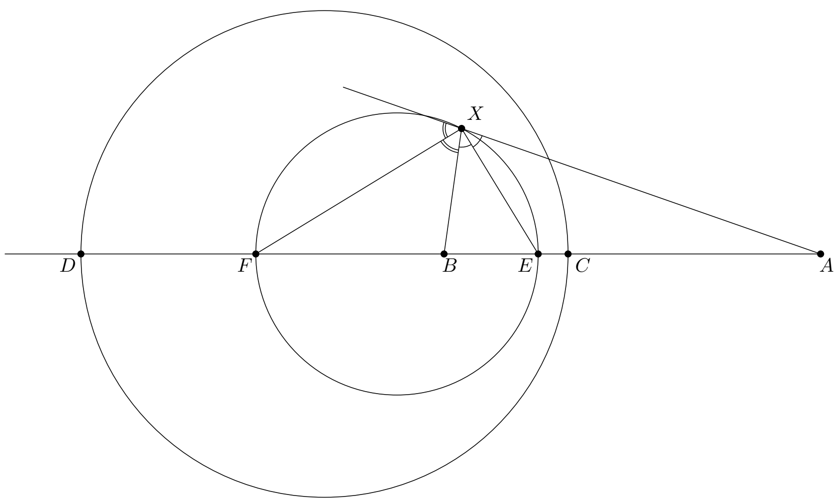
V předposlední rovnosti jsme využili vztah $|XT| = |YV|$ ze zadání a rovnost $|\sphericalangle XPT| = |\sphericalangle YPV|$.



Z toho ihned plyne, že $\sin|\sphericalangle TWP| = \sin|\sphericalangle VWP|$. Takže buď je $|\sphericalangle TWP| = |\sphericalangle VWP|$, nebo $|\sphericalangle TWP| + |\sphericalangle VWP| = 180°$. Druhá možnost však nemůže nastat, protože $|\sphericalangle TWP| + |\sphericalangle VWP| = |\sphericalangle TWV| < 180°$. Takže $|\sphericalangle TWP| = |\sphericalangle VWP|$, čili P skutečně leží na ose úhlu VWT. $\square$

2 Apollóniova kružnice

Věta 2.1. *Nechť A a B jsou dva body v rovině a $k > 0$ je reálné číslo různé od 1. Nechť C a D jsou body na přímce AB takové, že C leží uvnitř úsečky AB, D leží mimo ni, a navíc $\frac{|AC|}{|BC|} = k = \frac{|AD|}{|BD|}$. Pak množina bodů X v rovině takových, že $\frac{|AX|}{|BX|} = k$ je přesně kružnice nad průměrem CD. Této kružnici říkáme Apollóniova kružnice.*



Důkaz. Nechť X je nějaký bod v rovině mimo přímku AB takový, že $k = \frac{|AX|}{|BX|}$. Označme jako C' a D' průniky os vnitřního a vnějšího úhlu AXB s přímkou AB. Díky úloze 1.2 víme, že $\frac{|AC'|}{|C'B|} = k = \frac{|AD'|}{|BD'|}$. Z toho plyne, že $C' = C$ a $D' = D$. Zároveň, protože osy vnitřního a vnějšího úhlu jsou kolmé, leží X na kružnici nad průměrem $C'D' = CD$. Tedy každý bod X splňující $\frac{|AX|}{|BX|} = k$ leží na kružnici nad průměrem CD.

Nyní nechť X je nějaký bod v rovině mimo přímku AB takový, že $k \neq \frac{|AX|}{|BX|}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $k > 1$. Označme $\ell = \frac{|AX|}{|BX|}$. Jsou-li E a F body na přímce AB takové, že $\frac{|AE|}{|EB|} = \ell = \frac{|AF|}{|BF|}$, pak víme, že X leží na kružnici nad průmerem EF. Ukážeme, že X pak nemůže ležet na kružnici nad průměrem CD.

Pokud $\ell \leq 1$, pak $|AX| \leq |BX|$. Ale díky tomu, že $\frac{|AC|}{|BC|} = k = \frac{|AD|}{|BD|}$, platí $|AC| > |CB|$ a $|AD| > |DB|$. To znamená, že všechny body kružnice nad průměrem CD jsou od A dále než od B, čili X na této kružnici neleží.

Dále můžeme předpokládat $\ell > 1$. Pak bez újmy na obecnosti stačí řešit případ, kdy $\ell > k$. Potom díky $\frac{|AC|}{|BC|} = k = \frac{|AD|}{|BD|}$ a $\frac{|AE|}{|EB|} = \ell = \frac{|AF|}{|BF|}$ víme, že body E, F leží uvnitř úsečky CD. Ale protože toto jsou průměry příslušných kružnic, znamená to už, že kružnice nad průměrem EF leží celá uvnitř kruhu nad průměrem CD. Tím máme hotovo. □

Poznámka 2.2. *Poznamenejme, že pro $k = 1$ je uvažovaná množina osou úsečky AB. I to se dá za určitých okolností interpretovat jako vyhovující množina – je to totiž „kružnice" nad průměrem, který má za krajní body střed úsečky AB a „bod v nekonečnu ve směru AB". Detaily této interpretace jsou však nad rámec tohoto textu.*

Úloha 2.3. *Nechť ABC je různostranný ostroúhlý trojúhelník. Pak existuje bod X uvnitř ABC takový, že*

$$|BC| \cdot |XA| = |CA| \cdot |XB| = |AB| \cdot |XC|.$$

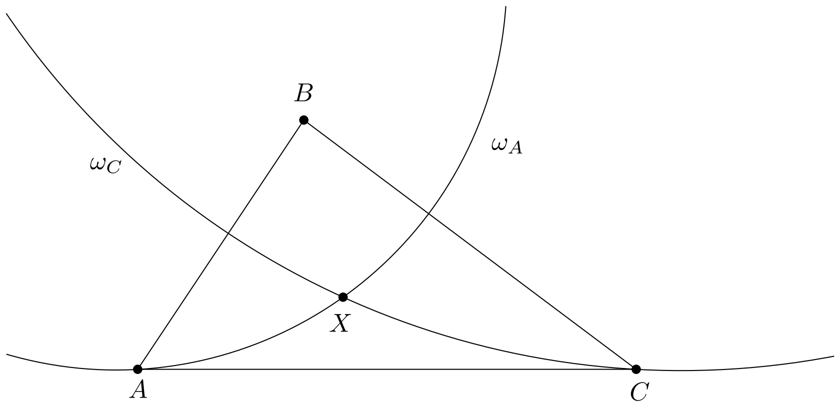
Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že AC je nejdelší strana.

Nechť ω_A je Apollóniova kružnice příslušná bodům B, C a poměru $\frac{|BA|}{|CA|}$ a nechť ω_C je Apollóniova kružnice příslušná bodům B, A a poměru $\frac{|BC|}{|CA|}$. Je jasné, že $A \in \omega_A$, $C \in \omega_C$ a bod B leží uvnitř ω_A i ω_C.

Protože ω_A protíná úsečku BC ve vnitřním bodě, je nějaký bod kružnice ω_A uvnitř ω_C. Analogicky je i nějaký bod kružnice ω_C uvnitř ω_A. To znamená, že se kružnice ω_A a ω_C protínají v nějakém bodě X.

Protože $X \in \omega_A$, je $\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|BA|}{|CA|}$. Z toho plyne, že $|BX| \cdot |CA| = |CX| \cdot |BA|$. Protože však také $X \in \omega_C$, je $\frac{|BX|}{|AX|} = \frac{|BC|}{|AC|}$. Z toho plyne $|BX| \cdot |CA| = |AX| \cdot |BC|$.

Takže dohromady máme $|BC| \cdot |XA| = |CA| \cdot |XB| = |AB| \cdot |XC|$.



□

Literatura

[AoPS] Internetové fórum Art of Problem Solving
`https://artofproblemsolving.com`

[MKS] Knihovna Matematického Korespondenčního Semináře
`https://prase.cz/library/library.php`

[TP] Sinová věta (Tomáš Pavlík)
`https://prase.cz/library/SinovaVetaTSP/SinovaVetaTSP.pdf`

SPODNÍ ODHADY S POUŽITÍM MNOŽSTVÍ INFORMACE

Filip Bialas

V mnoha oblastech matematiky se setkáváme s úlohami na hledání maxima či minima. Asi nejčastějším problémem, se kterým jste se mohli setkat, je hledání extrémů různých funkcí. V tomto příspěvku se nicméně zaměříme na neméně zajímavé kombinatorické úlohy. Jak je tomu u kombinatorických olympiádních úloh zvykem, neexistuje jeden univerzální postup, který by nás vždy dovedl ke správnému výsledku. Nicméně existuje několik principů, které se v různých podobách v úlohách často vyskytují. V tomto příspěvku se zaměříme především na odhadování minim počítáním, jak velké množství informace jsme mohli cestou získat. Příkladem problému, k jehož řešení nám mohou úvahy popsané níže pomoci, je úloha 70-A-I-6 matematické olympiády, která má následující znění:

Mějme 70 zhasnutých žárovek. Pro libovolnou skupinu žárovek jsme s to připravit přepínač, který změní stav každé žárovky z této skupiny (zhasne rozsvícené a rozsvítí zhasnuté) a ostatní žárovky neovlivní. Jaký je nejmenší počet přepínačů, pomocí nichž je možné rozsvítit libovolnou čtveřici žárovek (přičemž ostatní budou zhasnuté)?

Řešení podobného problému by mělo snad vždy sestávat ze dvou částí: konstrukce a důkazu minimality. Abychom dokázali, že n je onen minimální počet přepínačů, měli bychom zkonstruovat oněch n přepínačů a ukázat, že pomocí nich můžeme požadovaných stavů dosáhnout. Zároveň ale musíme i zdůvodnit, že menší počet přepínačů nikdy stačit nebude. Tento důkaz minimality bývá často těžší než konstrukce, ale je k plnohodnotnému důkazu stejně důležitý. Určitě uznáte, že jednoduché zdůvodnění, že 1 přepínač nestačí (takže potřebujeme alespoň 2), nebo konstrukce 2^{70} přepínačů (jeden pro každou podmnožinu žárovek), nezní jako uspokojivé řešení. Stejně tak když tipnete správně ono minimum, je potřeba probrat obě části důkazu, protože jinak nikoho nepřesvědčíte, že se o minimum skutečně jedná.

Právě s důkazy minimality bývají potíže. Často je těžké i se správně určeným minimem zdůvodnit, že dané číslo opravdu nemůže být menší. Jednu techniku, která se dá ve zmíněné úloze použít, si ukážeme na dvou úlohách s váhami a posléze na mnohem praktičtějším informatickém problému, jak co nejrychleji pomocí počítače seřadit čísla podle velikosti.

1 Váhy

Úloha 1.1. *Mějme 80 stejně těžkých mincí a jednu falešnou lehčí. Kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách potřebujeme, abychom určili, která z mincí je falešná? (Na váhy můžeme položit dvě disjunktní množiny mincí a zjistit, která z těchto množin je těžší, či jestli jsou obě stejně těžké.)*

Řešení. Zkonstruujeme nejdříve algoritmus, který zvládne najít falešnou minci pomocí maximálně 4 vážení. Jak to uděláme? Rozdělíme si všech 81 mincí do tří hromádek o 27 mincích a položíme na váhy dvě z nich. Pokud bude jedna z těchto dvou hromádek těžší než druhá, víme jistě, že je falešná mince v té lehčí z nich. Pokud budou obě stejně těžké, víme jistě, že v nich falešná mince není, takže musí být ve třetí zbývající hromádce. Nezávisle na tom, jak vážení dopadlo, zbývá nám 27 mincí, ve kterých ta falešná musí jistě být. Tento postup dělení na třetiny můžeme nyní ještě třikrát zopakovat. Posléze nám zůstane mezi těmi, které můžou být falešné, pouze jediná mince.

Nyní ale ještě nejsme hotovi. Z našeho postupu nijak nevyplývá, že neexistuje jiný algoritmus, který by sestával z méně vážení.

Uvažme libovolný postup, který používá nejvíce k vážení. Při každém vážení můžeme dostat pouze tři různé výsledky. Po nejvýše k váženích můžeme proto dostat maximálně 3^k různých výsledků. Aby náš postup fungoval, musíme být z každého z těchto maximálně 3^k výsledků schopni jednoznačně určit, která mince je falešná. Pokud by ale 3^k bylo menší než počet mincí, můžeme si být jisti, že se ke správnému výsledku nemůžeme vždy dobrat.

Pro $k < 4$ opravdu vychází, že $3^k < 3^4 = 81$, čímž je naše úloha dořešena. □

Podobně kdybychom nejdříve použili argument z druhého odstavce a dospěli k závěru, že $k \geq 4$, samozřejmě by to ještě neznamenalo, že nějaký algoritmus pro $k = 4$ existuje. Argument s množstvím získané informace se dá použít pouze na spodní odhad, nikoliv ke konstrukci algoritmu.

Můžete si sami vyzkoušet pozměněnou úlohu, kdy předem nevíme, jestli je falešná mince lehčí či těžší. Prozradím, že zde nám již 4 vážení stačit nebudou. Jeden ze způsobů, jak to dokázat, je uvědomit si, že alespoň pro některé možnosti falešných mincí, zjistíme při vážení navíc i informaci, zda jsou lehčí či těžší.

Nyní si ukážeme podobnou úlohu, kde bude naším cílem dokázat pouze spodní odhad. (Opravdu v tomto případě nebude vždy existovat postup, pro který by byl maximální počet vážení roven oné spodní hranici.)

Úloha 1.2. *Mějme n mincí, z nichž každá může být buď pravá nebo falešná, a kouzelnou váhu, na kterou můžeme položit vždy libovolnou podmnožinu mincí, přičemž nám váha posléze řekne, kolik z těchto mincí je falešných. Ukažte, že ke zjištění, které mince jsou falešné, potřebujeme alespoň $\frac{n}{log_2(n+1)}$ vážení.*

Řešení. Možností, které mince jsou falešné, je tolik, jako je podmnožin n-prvkové množiny, tj. 2^n. Váha nám při každém vážení odpoví jedno z celých čísel mezi 0 a n, neboť na váhu dáváme vždy maximálně n mincí. Máme tedy vždy maximálně $n+1$ možných výsledků. Po nejvýše k váženích tedy dospějeme k maximálně $(n+1)^k$ výsledků. Abychom rozlišili všechny možnosti, musí být toto jistě větší nebo rovno 2^n. Dostáváme proto nerovnost $(n+1)^k \geq 2^n$, což je po použití logaritmu o základu 2 ekvivalentní s $k \log(n+1) \geq n$. Po vydělení $\log(n+1)$ již dostaneme požadovaný odhad. □

2 Třídění

Přesuneme se nyní k jednomu problému, který leží v základech teoretické informatiky. Jedná se o problém, jak seřadit n čísel podle velikosti co nejrychleji.

Tento problém si můžeme představit matematicky lehce zjednodušeně následovně. Mějme n karet s různými čísly otočené tak, abychom na ně neviděli. Budeme chtít seřadit tyto karty podle velikosti. S kartami ale můžeme interagovat pouze tak, že se podíváme na dvě z nich a zjistíme, na které je napsané větší číslo. Toto je jediná informace, kterou si zapamatujeme. Naším cílem je zjistit pořadí karet pomocí co nejméně kroků.

V informatice nás zas tak nezajímá přesný minimální počet kroků, ale spíše jen, jak se tento počet mění jako funkce n. Pokud existuje nějaká reálná konstanta c taková, že umíme vyřešit daný problém pro každé přirozené n pomocí nejvýše cn kroků, říkáme, že časová složitost našeho algoritmu je lineární. (Pokud by algoritmus používal $3n+9$ kroků pro všechna n, jeho časová složitost je lineární, neboť $3n+9 \leq 12n$, pro všechna n, takže můžeme volit $c = 12$ nebo libovolné větší. Naopak pokud by náš algoritmus používal n^2 kroků, jeho časová složitost již lineární není, neboť n^2 bude větší než cn, kdykoliv zvolíme $n > c$.)

Lineární časová složitost je v případech, kdy máme n různých dat, na které se všechny musíme podívat, to nejlepší, čeho můžeme dosáhnout. Nyní ale ukážeme, že v problému řazení čísel podle velikosti zformulovaného pomocí karet výše žádný takto rychlý algoritmus neexistuje. Použijeme k tomu úplně stejné argumenty, jako při řešení úlohy s váhami výše.

Počet způsobů, jak může být n karet seřazených podle velikosti, je roven $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Při každém porovnání získáme pouze dva různé výsledky – které ze dvou porovnávaných čísel je větší. Po k krocích máme proto dostatek informace k rozlišení maximálně 2^k různých výsledků. Abychom jednoznačně určili, jak jsou všechna čísla seřazena, musí být nutně $2^k > n!$.

Faktoriál vpravo můžeme odhadnout následovně: $n!$ je roven součinu n čísel velikosti alespoň 1, z nichž prvních $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ je jistě větších nebo rovných $\frac{n}{2}$. Platí proto

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Celkově tedy musí být $2^k > \left(\frac{n}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$. Vezmeme-li logaritmus o základu 2, dostaneme, že $k > \frac{n-1}{2} \log_2(\frac{n}{2})$. Pro $n \geq 2$ je výraz na pravé straně jistě větší nebo roven $\frac{n}{3}(\log_2 n - \log_2 2)$, což je pro n takové, že $\log_2 2 < \frac{1}{2} \log_2 n$ (tj. pro $n > 4$), větší než $\frac{n}{6} \log_2 n$. Jelikož $\log_2 n$ roste přes všechny meze pro rostoucí n, nemůže být $k < cn$ pro reálnou konstantu c.

Vidíme dokonce, že $k \geq \frac{1}{6} n \log_2 n$. Existuje mnoho algoritmů, které zvládnou čísla setřídit v čase úměrném $n \log n$. Pro řazení čísel tím pádem známe algoritmy s optimální časovou složitostí, což není v informatice příliš obvyklé. Vysvětlováním těchto algoritmů bych se ale už hodně odchýlil od tématu příspěvku. Zvědavé čtenáře odkáži na [KSP] ve zdrojích.

V tomto příspěvku bylo vyřešeno několik úloh, v nichž princip odhadování pomocí množství informace dával správný, nebo alespoň dostatečně zajímavý spodní odhad. Po uvědomění si, do kterých všech stavů rozsvícených žárovek se při splnění předpokladu umíme dostat, jde tento princip použít dobře i v úloze letošní matematické olympiády. Ve spoustě úloh ale tento princip dává bohužel příliš slabé spodní odhady a je třeba použít i jiné argumenty.

Literatura

[KSP] *Korespondenční seminář z programování.*
`https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/trideni/`

[IKS] V. Rozhoň: *Entropie a Jensenova nerovnost.* Přednáška ze soustředění korespondenčního semináře IKS.
`http://iksko.org/files/sbornik7.pdf`

Kategorie

B

CIFERNÉ ÚLOHY

Martin Raška

Nejrozšířenější číselnou soustavou je ve společnosti už odedávna dozajista ta desítková. Ať už je to z důvodů počtu prstů na rukou nebo jiných, jsme zvyklí v této soustavě počítat i myslet. Stejně tak v matematické olympiádě se často objevují úlohy, kdy dostaneme čísla s proměnnými na místech cifer a máme o nich něco dokázat. Příkladem toho je i úloha 70-B-I-1:

Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB+CD+EF+GH+IJ$ a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu 07 *nepovažujeme za dvoumístná čísla.)*

Zadaná úloha má dvě podstatné části. Jednak je třeba najít hodnoty, kterých daný součet může dosáhnout (a ukázat, že každou z nich skutečně může nabývat), a dále je nutné ukázat, že jiných hodnot nabývat nemůže. Úlohy tohoto typu jsou pro olympiádu typické a často se chybuje v opomenutí zdůvodnění jedné z těchto dvou částí.

V následujícím textu si na příkladech ukážeme několik technik, kterými lze k ciferným úlohám přistupovat.

1 Úvod

Značením $x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$, kde $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$, $a_n \neq 0$, máme na mysli desítkový (či dekadický) zápis čísla x. V podstatě tak jenom říkáme, že číslo x je postupně zleva tvořeno v ciframi a_n až a_0 při klasickém desítkovém značení.

To se dá interpretovat i následující rovností:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Například při volbě $n = 2$ a $a_2 = 2$, $a_1 = 5$, $a_0 = 4$ to znamená, že $\overline{a_2 a_1 a_0} = \overline{254} = 254 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 1$. Přepis ciferného zápisu na součet s mocninami desítky je často dobrým prvním krokem při řešení úloh. Občas lze ale i rovnost s ciferným zápisem interpretovat přímo.

Úloha 1.1. *Čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ splňuje $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$. Jakých ciferných součtů může $\overline{abcd}$ nabývat?*

Řešení. Rovnost $\overline{ab}-\overline{cd} = 10$ lze přímo interpretovat tak, že dvouciferná čísla $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ se liší na místě desítek právě o 1, a tedy $c = a - 1$, $b = d$.

K analogickým závěrům lze dojít i při rozepsání pomocí mocnin desítky. Rovnost $10a+b-(10c+d) = 10$ lze upravit na $10(a-c-1) = d-b$. Celé číslo $d - b$ je pak nutně násobek 10, ale zároveň je v absolutní hodnotě menší než 10 (neboť $0 \leq b, d \leq 9$) a jediný násobek desítky mezi -9 a 9 je 0. Tedy $b - d = 0$, z čehož už hravě odvodíme výše zmíněné rovnosti.

Ciferný součet je poté roven $s = a+b+c+d = a + b + (a - 1) + b = 2a + 2b - 1 = 2(a + b) - 1$. Odtud můžeme najít několik omezení hodnot s. Z faktu $a, b \in \{0, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$ jsou hned patrné nerovnosti $1 = 2(1 + 0) - 1 \leq s \leq 2(9 + 9) - 1 = 35$. Dále musí být kvůli výše získané rovnosti s určitě liché. Tímto jsme vyřešili půlku úlohy a ukázali, že s může být pouze liché číslo mezi 1 a 35. Nakonec je třeba ukázat, že opravdu může nabývat každé z těchto hodnot (tedy, že pro každou z těchto hodnot existuje odpovídající čtyřmístné číslo).

To se může zdát na první pohled jasné, ale je třeba to pořádně zdůvodnit. Jedna z možností je pro každý ze součtů napsat příklad čtyřmístného čísla. To by ale při větším rozsahu bylo nepoužitelné, a tak si ukážeme něco chytřejšího. Z rovnosti $s = 2(a + b) - 1$ stačí ukázat, že lze zvolit čísla a, b tak, aby jejich součet $a + b$ nabýval libovolné hodnoty mezi 1 a 18. Všechny tyto hodnoty lze projít například tím, že začneme na dvojici $(a, b) = (1, 0)$, postupně budeme zvyšovat a o 1 až na $(9, 0)$ a následně budeme obdobně zvyšovat b až na dvojici $(9, 9)$. Protože jsme začali na součtu 1, pokaždé ho zvýšili o 1 a skončili na součtu 18, tak jsme jistě prošli všechny požadované součty. Tím je důkaz hotov. $\square$

V části důkazu, kde se omezovaly možné hodnoty s, jsme využili dělitelnosti 2 a efektivně eliminovali polovinu možností. Podobná omezení za pomocí dělitelnosti jsou v úlohách častá, vybudujeme si tedy na toto téma trochu teorie.

2 Kritéria dělitelnosti

Jak je ze školy dobře známé, celé číslo dává po dělení 3 či 9 stejný zbytek jako jeho ciferný součet. Pro dělitelnost 11 platí podobná formule, akorát se u cifer střídají znaménka plus a minus. Někteří čtenáři možná i slyšeli, že se s dělitelností 7 pojí magická šestice $1, 3, 2, 6, 4, 5$. Pojďme si ukázat, kde se tyto věci vzaly a jak je odvodit obecně.

Mějme přirozené číslo

$$x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

a zajímá nás jeho zbytek po dělení číslem n. Pro začátek si dokažme krátké lémma.

Lémma 2.1. *Buď n dané přirozené číslo, a, b a c, d dvojice celých čísel takové, že a dává stejný zbytek po dělení n jako b, c dává stejný zbytek po dělení n jako d. Potom platí*

1. *$a + c$ dává stejný zbytek po dělení n jako $b + d$,*
2. *ac dává stejný zbytek po dělení n jako bd,*
3. *pro libovolné přirozené k dává a^k stejný zbytek po dělení n jako b^k.*

Důkaz. Protože dávají a, b stejný zbytek, tak n dělí $a - b$ neboli existuje celé číslo k takové, že $a = kn + b$. Analogicky existuje celé l splňující $c = ln + d$.

Potom $a + c = (kn + b) + (ln + d) = n(k + l) + (b + d)$. Číslo $a + c$ tedy skutečně dává stejný zbytek po dělení n jako $b + d$.

Obdobně $ac = (kn+b)(ln+d) = n(kln+kd+lb)+bd$, z čehož plyne druhá část tvrzení.

Poslední část tvrzení dostaneme iterovaným použitím dokázaného pravidla o násobení na stejné dvojice (a, b), (a, b). □

První část lémmatu nám v podstatě říká, že než abychom zkoumali dělitelnost čísla x jako celku, tak se můžeme podívat na jeho mocninný zápis, rozkouskovat si ho na jednotlivé členy $a_i \cdot 10^i$, ty vyšetřit zvlášť, a pak zase složit dohromady. Druhá část lémmatu nám zase říká, že totéž můžeme udělat i pro součin $a_i \cdot 10^i$ a zkoumat zvlášť, jaký zbytek dává po dělení n číslo 10^i. Poslední část zase pro změnu implikuje, že číslo 10 si můžeme nahradit jiným příhodným číslem, které dává stejný zbytek po dělení n – například tím samotným zbytkem po dělení.

Podíváme-li se nyní na dělitelnost 9, tak víme, že 10 dává po dělení 9 zbytek 1. Číslo 10^n, tak dává po dělení 9 zbytek $1^n = 1$. Z toho už lze poskládáním předchozích úvah vidět, že x dává po dělení 9 stejný zbytek jako číslo $a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + \cdots + a_0$. Tedy přirozené číslo dává po dělení 9 stejný zbytek jako jeho ciferný součet. Analogické pozorování by se dalo udělat pro dělení 3.

Při dělení 11 naopak dává 10 stejný zbytek[1] jako -1, tedy 10^n dává stejný zbytek jako $(-1)^n$. Obdobnou úvahou jako minule si lze rozmyslet,

[1] Je třeba si rozmyslet, jak se zbytky po dělení chovají na záporných číslech. Z rovnosti $-1 = 10 - 11$ by měla jít vidět pravdivost tohoto tvrzení.

že zbytek čísla x po dělení 11 je stejný jako zbytek následujícího součtu se střídajícími se znaménky

$$a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + \cdots - a_1 + a_0.$$

Věta 2.2. *Buď x n-ciferné přirozené číslo s desítkovým zápisem $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$. Pak platí*

- *x má stejný zbytek po dělení 3 a 9 jako $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$,*
- *x má stejný zbytek po dělení 11 jako $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n$.*

Můžeme ještě pro ilustraci obecného principu zkoumat dělitelnost 7. Pak nás zajímají zbytky čísel 1, 10, 10^2, ... po dělení 7. Platí, že zbytek čísla 10^n po dělení závisí pouze na zbytku předchozí mocniny 10^{n-1}, neboť $10^n = 10 \cdot 10^{n-1}$. Zároveň zbytků po dělení 7 je konečně mnoho, takže se musí posloupnost zbytků čísel $1, 10^1, 10^2, \ldots$ po dělení 7 časem zacyklit. V tomto případě dostaneme postupně zbytky $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, \ldots$ Číslo x tedy dá po dělení 7 stejný zbytek jako $1 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 + 4 \cdot a_4 + 5 \cdot a_5 + 1 \cdot a_6 + \cdots$ Analogicky se posloupnosti zbytků zacyklí i pro obecné n, akorát může mít posloupnost i nějakou předperiodu, pokud je n soudělné s 10. Například pro 12 dostaneme postupně posloupnost zbytků $1, 10, 4, 4, 4, \ldots$, což souhlasí s tím, že nás zajímá dělitelnost 4 (závislá pouze na prvních dvou cifrách) a dělitelnost 3 (kde uvažujeme ciferný součet neboli každá cifra má stejnou jedničkovou váhu).

Pro další znalosti z teorie čísel lze doporučit článek [STČ], zejména značení pomocí kongruencí umí velmi ulehčit sepisování řešení.

Pojďme získané znalosti otestovat na úloze.

Úloha 2.3. *Čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ má ciferný součet 13 a je dělitelné 11. Jakých hodnot může nabývat číslo $\overline{ab} + \overline{cd}$?*

Řešení. Zajímá nás hodnota $s = 10a + b + 10c + d$. Ze zadání víme, že ciferný součet je $a + b + c + d = 13$, takže můžeme psát $s = 13 + 9(a + c)$. Chceme tedy zjistit, jakých hodnot může nabývat $a + c$. K tomu nám pomůže kritérium s dělitelností 11, které říká, že i číslo $d - c + b - a = (d + b) - (c + a)$ je dělitelné 11. To ale vzhledem k velikosti uvažovaných čísel znamená, že $(d+b) - (c+a)$ je jedním z čísel z množiny $\{-11, 0, 11\}$. Zároveň víme, že $(c + a) + (d + b) = 13$. Nabízí se tak udělat substituci $a + c = x$, $d + b = y$ a řešit příslušné soustavy rovnic $x + y = 13$, $y - x \in \{-11, 0, 11\}$.

- V případě $y - x = -11$ dostáváme odečtením rovnic výsledek $2x = 24$. Tedy $x = 12$ a $s = 121$ (například pro číslo 6061).
- V případě $y - x = 0$ dostáváme $2x = 13$, což je vzhledem k paritě čísel spor, takže tato varianta nedává žádné řešení.
- V případě $y - x = 11$ platí $x = 1$, což dá výsledek $s = 22$ (například pro číslo 1606).

Hledaný součet tedy může být buď 121 nebo 22. □

Úloha 2.4. *Čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ má ciferný součet 13 a je dělitelné 11. Jakých hodnot může nabývat číslo $\overline{ab} - \overline{dc}$?*

Návod. Upravte hledaný rozdíl do tvaru obsahujícího $d - c + b - a$ a inspirujte se předchozím řešením. □

3 Lokální změny

Na závěr si ukážeme ještě jednu důkazovou techniku, která není specifická pro ciferné úlohy, ale spíše pro úlohy, kde máme předem danou množinu čísel či objektů a záleží nám na jejich rozmístění. Ve zkratce se jedná o to, že děláme malé lokální změny a pozorujeme, jak se projevují v globálním měřítku. Nejlepší bude ukázat si to na úloze.

Úloha 3.1. *V řadě máme v nějakém pořadí za sebou napsána čísla $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5$. Pro každou dvojici stejných čísel změříme jejich vzdálenost v řadě (např. pokud jsou dvě čísla u sebe, tak je vzdálenost 0) a všechny tyto vzdálenosti sečteme. Jaký výsledek můžeme dostat?*

Pro ilustraci například pro seřazení $1, 2, 1, 3, 3, 2, 4, 5, 4, 5$ je vzdálenost jedniček 1, vzdálenost dvojek 3, trojek 0, čtyřek 1 a pětek 1, takže celková vzdálenost je $1 + 3 + 0 + 1 + 1 = 6$.

Důkaz. Mějme libovolně seřazená čísla. Budeme provádět malé lokální změny, které budou spočívat v prohození sousedních čísel. Jak jedno takovéto prohození ovlivní náš celkový součet? Pokud jsou prohozená čísla stejná, tak se nic nestane. Pokud jsou různá, tak můžou nastat následující tři případy.

Obě čísla se přiblíží svým protějškům. Potom se celkový součet zmenší o 2.

Obě čísla se oddálí od svých protějšků. Potom se celkový součet zvýší o 2.

Jedno z čísel se protějšku přiblíží a druhé oddálí. Pak celkový součet zůstane stejný.

Tak jako tak zůstane parita součtu stejná a součet se změní nejvýše o 2. Zároveň lze vidět, že se pomocí těchto operací umíme z libovolného počátečního stavu dostat na libovolný koncový stav – například můžeme postupně umísťovat prvky zleva do správných pozic.

Stav s nejnižším možným součtem 0 je například 1122334455 a nejvyšší možný součet 20 má například 5432112345 (jak bude dokázáno později).

Ze stavu 1122334455 se umíme pomocí lokálních změn dostat do libovolného jiného stavu a jedno prohození nezmění paritu součtu. Všechny stavy tak musí mít sudý součet. Zároveň určitě umíme nabýt libovolného sudého součtu mezi 0 a 20. Při postupném přerovnávání z 1122334455 do 5432112345 se totiž vždy mění hodnota maximálně o 2 a vzhledem k tomu, že začínáme na 0 a končíme na 20, tak pro každou sudou hodnotu mezi nimi musí existovat nějaký mezistav, který ji nabývá.

Zbývá ukázat, že nejvyšší možný součet je skutečně 20. Tento důkaz už je nad rámec tématu článku, ale pro pořádek ho udělejme. Jako první je dobré si uvědomit, že vzdálenost dvou čísel je jenom počet čísel mezi nimi. Nyní uděláme trik a budeme se koukat, jak se navzájem ovlivňují dvojice stejných čísel – například 11 a 22. V možném uspořádání $1 \cdots 2 \cdots 1 \cdots 2$ (kde tečky reprezentují nějaká čísla mezi) přispívají jedničky do vzdálenosti dvojek právě 1 číslem (druhá jednička), stejně tak přispívají dvojky do vzdálenosti jedniček 1 číslem (první dvojka). Dohromady tak přispívají do celkové vzdálenosti 2. Jiné možné uspořádání je $1 \cdots 2 \cdots 2 \cdots 1$. Tady nepřispívají jedničky do vzdálenosti dvojek ničím (ani jedna jednička není mezi dvojkami) a dvojky naopak přispívají do vzdálenosti jedniček 2 čísly. Dohromady tak přispívají do celkové vzdálenosti také 2. Poslední možnost (až na symetrii) je $1 \cdots 1 \cdots 2 \cdots 2$, která nepřispívá do celkové vzdálenosti ničím. Lze si rozmyslet, že když sečteme tyto příspěvky přes všechny dvojice, tak skutečně dostaneme celkový součet vzdáleností. A protože dvojic je právě $\binom{5}{2} = 10$, tak je maximální možný součet skutečně 20. □

Literatura

[STČ] J. Svoboda, Š. Šimsa: *Seriál – Teorie čísel I.* Dostupné z: `https://prase.cz/archive/33/uvod1s.pdf`.

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

MAXIMALIZACE VÝRAZŮ

Miroslav Zelený

Maximalizace matematických výrazů neboli hledání maxim funkcí je jednou z důležitých úloh matematiky. V plné obecnosti jde o úlohu, kde nemůžeme čekat, že bude k dispozici obecný algoritmus vedoucí vždy k výsledku. Řadu úloh takového typu lze řešit pomocí metod diferenciálního počtu. V tomto příspěvku se však budeme věnovat metodám, které jsou elementární. Motivací je pro nás úloha 70-B-I-2 z Matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Jaká je největší možná hodnota výrazu $xy - x^3y - xy^3$, jsou-li x, y kladná reálná čísla? Pro která x, y se tato hodnota dosahuje?

1 Formulace problému

Upřesněme nejprve formulaci problému, kterým se budeme zabývat.

Problém 1.1. *Mějme danou neprázdnou množinu A a funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$. Naším úkolem je nalézt hodnotu M, která splňuje $f(x) \le M$ pro každé $x \in A$ a existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = M$. Součástí problému může také být nalezení všech prvků množiny A, ve kterých funkce f nabývá maximální hodnoty M.*

Do této třídy problémů spadá i výše uvedená úloha z Matematické olympiády. Množinou A je zde množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ a funkce f má tvar

$$f(x, y) = xy - x^3y - xy^3.$$

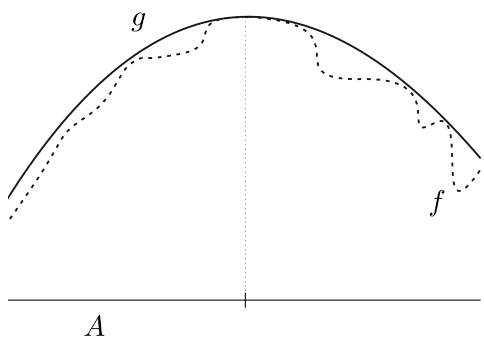
V dalších úlohách budeme v roli množiny A uvažovat podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Upozorněme také, že ne pro každou množinu A a funkci f musí mít Problém 1.1 řešení. Uveďme následující jednoduchou úlohu.

Úloha 1.2. *Nalezněte maximum funkce $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = x$ na množině $A = (0,1)$.*

Řešení. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že reálné číslo M je hledaným maximem. Pro každé $x \in (0,1)$ platí $f(x) < 1$. Číslo M tedy musí být menší než 1. Pokud ale $M < 1$, pak nalezneme reálné číslo x splňující $M < x < 1$. Odtud plyne $f(x) > M$, takže M není hledaným maximem, což je spor s předpokladem. Úloha tedy nemá řešení. □

2 Nerovnosti

Jedním ze způsobů, jak řešit Problém 1.1, je nalézt novou funkci g, která majorizuje funkci f na množině A, tj. $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in A$, a v bodě maxima funkce g nabývá funkce f stejné hodnoty jako g. Potom funkce f nabývá stejné maximální hodnoty jako funkce g. Smyslem tohoto postupu je, že chování funkce g pro nás může být mnohem přehlednější než chování funkce f. K důkazu nerovnosti $f(x) \leq g(x)$, pak můžeme mimo jiné použít některé známé nerovnosti, např. nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nebo Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost, kterým se ještě budeme věnovat. Nezřídka je funkce g volena jako konstantní. V takovém případě vlastně uhádneme či odhadneme maximální hodnotu uvažovaného výrazu a pak dokážeme správnost našeho odhadu. Následující obrázek a úloha ilustruje právě uvedenou metodu.



Úloha 2.1. *Nalezněte maximální hodnotu výrazu $x(1-x)$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$.*

Řešení. Množinou A je zde uzavřený interval $\langle 0, 1\rangle$ a funkce f má tvar $f(x) = x(1 - x)$. Pro libovolná dvě nezáporná reálná čísla c, d platí nerovnost

$$\sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2}, \tag{2.1}$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $c = d$ (vizte Větu 2.2). Položíme $c = x$ a $d = 1 - x$. Čísla c, d jsou nezáporná a podle (2.1) tak obdržíme

$$\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{x+1-x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Odtud plyne $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Rovnost mezi výrazy x a $1-x$ nastává právě tehdy, když $x = \frac{1}{2}$. V bodě $\frac{1}{2}$ tak nabývá výraz $x(1 - x)$ své maximální hodnoty $\frac{1}{4}$ v oboru $x \in \langle 0, 1\rangle$. $\square$

Nerovnost (2.1) je speciálním případem již zmíněné nerovnosti mezi aritmetickým průměrem a geometrickým průměrem, jejíž přesnou formulaci uvádíme v následující větě.

Věta 2.2 (AG nerovnost)**.** *Nechť* $a_1, \dots, a_n$ *jsou nezáporná reálná čísla. Potom platí*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \tag{2.2}$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Důkaz této věty není snadný kromě případu, kdy $n = 2$, a lze jej nalézt v brožuře [K]. Uveďme ještě další velmi užitečnou nerovnost.

Věta 2.3 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ *jsou reálná čísla. Potom platí*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big), \tag{2.3}$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když jeden z vektorů $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ *lze vyjádřit jako násobek druhého.*

Důkaz lze nalézt opět v [K].

Úloha 2.4. *Nechť* x, y, z *jsou nezáporná reálná čísla, která splňují rovnost* $x + y + z = 1$. *Nalezněte maximální hodnotu výrazu*

$$(x + 2y) \cdot (2x + z) \cdot (y + 2z). \tag{2.4}$$

Řešení. Množinou A je množina

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z = 1\}$$

a funkce f má tvar

$$f(x, y, z) = (x + 2y) \cdot (2x + z) \cdot (y + 2z).$$

Díky AG-nerovnosti dostaneme, že pro každé $[x, y, z] \in A$ platí

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\le \left(\frac{(x + 2y) + (2x + z) + (y + 2z)}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{3(x + y + z)}{3}\right)^3 = 1. \end{aligned}$$

V AG-nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když jsou si průměrovaná čísla rovna. V našem případě to znamená, že platí

$$x + 2y = 2x + z = y + 2z.$$

Spolu s podmínkou $x + y + z = 1$ odtud plyne, že $x = y = z = \frac{1}{3}$. Náš výraz (2.4) nabývá tedy maximální hodnoty 1 pro $x = y = z = \frac{1}{3}$. $\square$

Úloha 2.5. *Nalezněte maximální hodnotu výrazu $x + y$, kde x, y jsou reálná čísla splňující $x^2 + y^2 = 1$.*

Řešení. Množinou A je množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ a funkce f má tvar $f(x, y) = x + y$. Použitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti pro $[x, y] \in A$ obdržíme

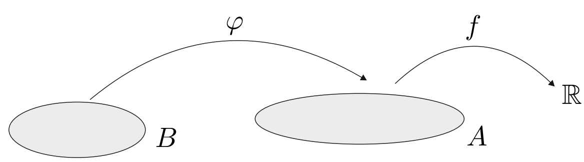
$$(x + y)^2 = (1 \cdot x + 1 \cdot y)^2 \leq (1^2 + 1^2) \cdot (x^2 + y^2) = 2 \cdot 1 = 2. \qquad (2.5)$$

Odtud plyne $x+y \leq \sqrt{2}$. Rovnost v (2.5) nastane, pokud jeden z vektorů (x, y) a $(1, 1)$ lze vyjádřit jako násobek druhého. Odtud plyne, že pro rovnost v (2.5) je třeba $x = y$. Spolu s podmínkou $x^2+y^2 = 1$ dostaneme, že $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nebo $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Přímým výpočtem snadno zjistíme, že své maximální hodnoty $\sqrt{2}$ nabude maximalizovaný výraz pro bod $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. $\square$

3 Parametrizace

Při řešení Problému 1.1 lze také postupovat následovně. Nalezneme množinu B a zobrazení $\varphi\colon B \to A$, které je na, tj. pro každé $x \in A$ existuje $z \in B$ takové, že $\varphi(z) = x$. Potom složené zobrazení $f \circ \varphi$ nabývá na B maximální hodnoty, která je rovna maximální hodnotě, které nabývá f na množině A, pokud tyto maximální hodnoty existují. Pokud totiž f nabývá maxima v bodě $a \in A$, pak $f \circ \varphi$ nabývá maxima v bodě $z \in B$, který splňuje $\varphi(z) = a$. Obráceně, pokud $f \circ \varphi$ nabývá svého maxima v bodě z, pak f nabývá svého maxima v bodě $\varphi(z)$.

Zobrazení φ nazýváme *parametrizace*. Množinou B je zpravidla podmnožina $\mathbb{R}^n$. Postupovat tímto způsobem je vhodné v tom případě, kdy funkce $f \circ \varphi$ má pro nás srozumitelnější chování a je pro nás jednodušší nalézt její maximum na množině B než maximum funkce f na množině A.



Vyřešme Úlohu 2.5 pomocí vhodné parametrizace.

Řešení. Symboly A a f mají stejný význam jako v prvním řešení. Použijeme parametrizaci množiny A pomocí goniometrických funkcí. Definujeme zobrazení $\varphi\colon \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\varphi(t) = [\cos t, \sin t].$$

Zobrazení φ zobrazuje interval $\langle 0, 2\pi\rangle$ na množinu A, což je jednotková kružnice se středem v počátku. Funkce $f \circ \varphi$ má tvar

$$f \circ \varphi(t) = \cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\bigl(t - \frac{\pi}{4}\bigr).$$

Funkce $f \circ \varphi$ nabývá na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ svého maxima v bodě $\frac{\pi}{4}$ a hodnota maxima je rovna $\sqrt{2}$. $\square$

Literatura

[K] A. Kufner: *Nerovnosti a odhady*, Škola mladých matematiků 39, Mladá fronta, 1976.

VÝŠKY V TROJÚHELNÍKU A BODY NA KRUŽNICI

Šárka Gergelitsová

Podobnost trojúhelníků bývá základem nejen řešení mnoha úloh Matematické olympiády, ale také odvození pokročilejších tvrzení, např. o úhlech v tětivových n-úhelnících. Zadání úlohy 70-B-I-3 dává tušit, že tyto vztahy využijeme i při jejím řešení. Zadání úlohy 70-B-I-3 zní:

V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$.

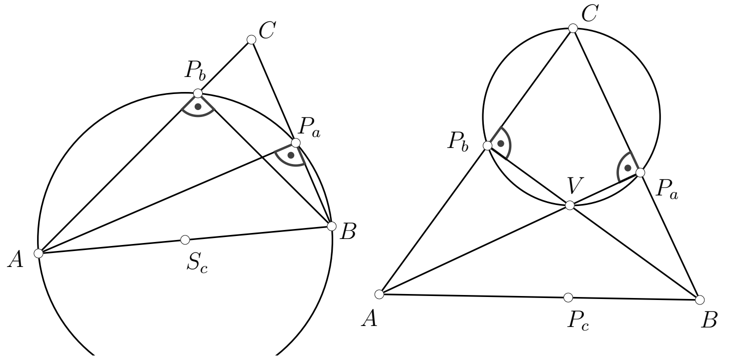
Úloha předpokládá, že daný trojúhelník je ostroúhlý, i v tomto textu se u několika úloh omezíme na důkazy tvrzení pro ostroúhlé trojúhelníky. Obecná tvrzení se často dokazují samostatně pro ostroúhlý a pro tupoúhlý trojúhelník, i když analogickým postupem (viz například úlohu 2.4.), pro pravoúhlé trojúhelníky bývá důkaz snazší.

1 Výšky trojúhelníku

Připomeňme si několik známých tvrzení:

Tvrzení 1.1. *Paty P_a, P_b výšek z vrcholů A, B trojúhelníku ABC na strany a, b leží na kružnici nad průměrem AB.*

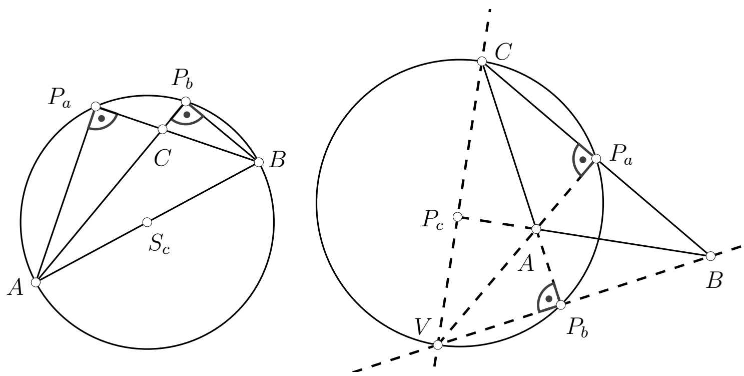
Tvrzení 1.2. *Paty P_a, P_b výšek z vrcholů A, B trojúhelníku ABC na strany a, b leží na kružnici nad průměrem CV, kde V je průsečík výšek.*



Obr. 1a: Kružnice procházející patami výšek – ostroúhlý trojúhelník

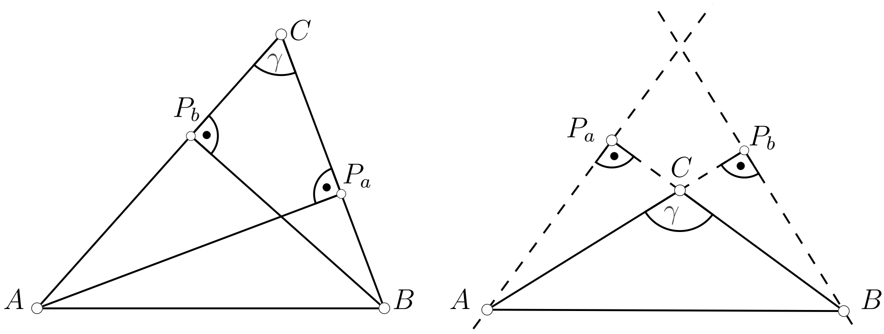
Obě uvedená tvrzení přímo plynou z toho, že kružnice nad daným průměrem KL bez jeho krajních bodů je množinou všech vrcholů pravých úhlů nad KL.

Obě tvrzení i jejich zdůvodnění jsou obecná, na obrázku 1b je vidět, jak se změní poloha obou pat kolmic vzhledem k průměru Thalétovy kružnice, pokud leží průsečík výšek V vně trojúhelníku ABC (tj. trojúhelník ABC je tupoúhlý). Pro trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí obě tvrzení triviálně.



Obr. 1b: Kružnice procházející patami výšek – tupoúhlý trojúhelník

Tvrzení 1.3. *Jsou-li P_a, P_b po řadě paty výšek z bodů A, B na strany a, b trojúhelníku ABC, kde úhel při vrcholu C není pravý, jsou trojúhelníky AP_aC, BP_bC podobné.*



Obr. 2: Podobné trojúhelníky

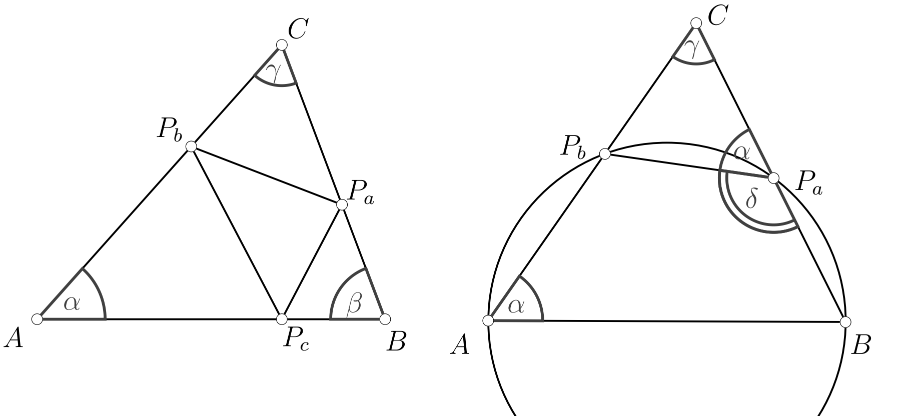
Je-li vnitřní úhel trojúhelníku ABC při vrcholu C ostrý, obsahují oba pravoúhlé trojúhelníky AP_aC, BP_bC úhel γ při vrcholu C, mají tedy shodné úhly. Je-li úhel při vrcholu C tupý, obsahují úhel vedlejší k úhlu γ (viz obr. 2).

2 Úhly v kružnici

Následující tvrzení o výškách bychom také odvodili pomocí podobnosti trojúhelníků. Odůvodnění významně zkrátíme užitím známé vlastnosti tětivového čtyřúhelníku (kterou nebudeme dokazovat, vyplývá ze známých vlastností středových a obvodových úhlů):

Věta 2.1. *Součet velikostí protilehlých úhlů v tětivovém čtyřúhelníku je* $180°$.

Tvrzení 2.2. *Nechť* P_a, P_b, P_c *jsou po řadě paty výšek z vrcholů* A, B, C *na strany* a, b, c*. Potom jsou trojúhelníky* $ABC, AP_bP_c, BP_cP_a, CP_aP_b$ *podobné.*

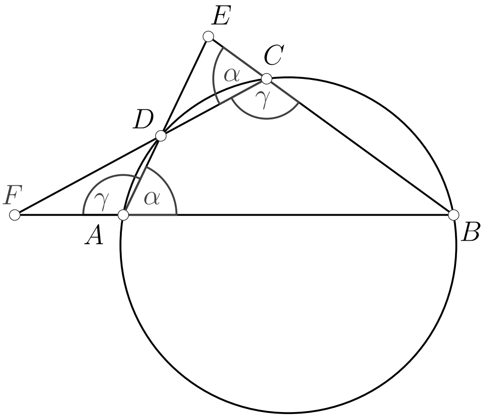


Obr. 3: Podobné trojúhelníky s vrcholy v patách výšek

Důkaz. Provedeme jen část důkazu pro ostroúhlé trojúhelníky ABC, CP_aP_b. Víme, že body A,B,P_a,P_b leží na kružnici (viz Tvrzení 1.2.), navíc v ostroúhlém trojúhelníku na ní leží v uvedeném pořadí – paty výšek leží uvnitř stran, takže výška v_c odděluje body P_b, P_a, které leží v téže polorovině s hraniční přímkou AB. Vrcholy A, P_a jsou tudíž protilehlé, proto $|P_bP_aB| = 180° - \alpha$. Protože jsou úhly P_bP_aB, P_bP_aC vedlejší, je $|P_bP_aC| = \alpha$. Oba trojúhelníky ABC, P_aP_bC mají vnitřní úhly o velikosti α a γ, jsou tedy podobné. □

Podobně sami dokažte následující tvrzení:

Tvrzení 2.3. *Nechť je* $ABCD$ *tětivový čtyřúhelník s vesměs různoběžnými stranami a nechť přímky* BC, AD *se protínají v bodě* E *a přímky* AB, CD *se protínají v bodě* F*. Pak jsou trojúhelníky* ABE, CDE *podobné a trojúhelníky* BCF, DAF *jsou podobné.* (viz obr. 4)

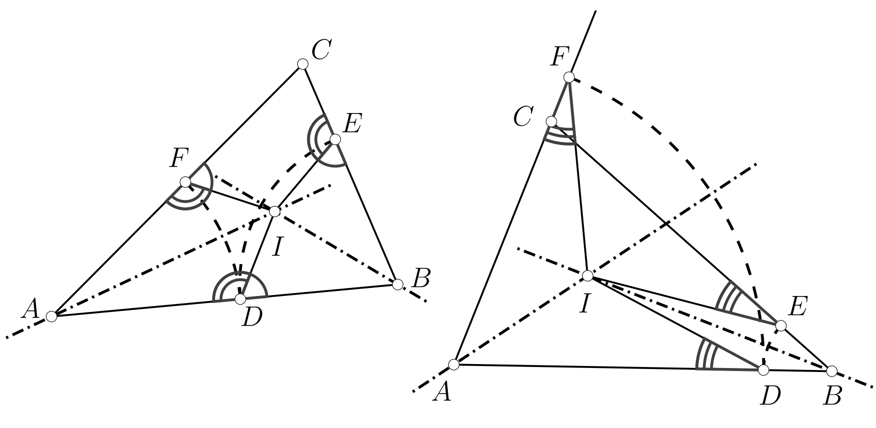


Obr. 4: Podobné trojúhelníky u tětivového čtyřúhelníku.

Body na jedné kružnici budeme zkoumat také v úloze 63-I-B-3. Je formulována obecně, a tak její důkaz musíme rozdělit na tři případy.

Úloha 2.4. *Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici.*

Řešení. Je-li I střed vepsané kružnice, leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku (obr. 5). Ze zadání $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$.
Trojúhelníky BEI, BDI jsou shodné, proto $|\sphericalangle BDI| = |\sphericalangle BEI|$.
Trojúhelníky AFI, ADI jsou shodné, proto $|\sphericalangle ADI| = |\sphericalangle AFI|$.
Bod D je vnitřní bod úsečky AB, proto $|\sphericalangle ADI| + |\sphericalangle BDI| = 180°$.



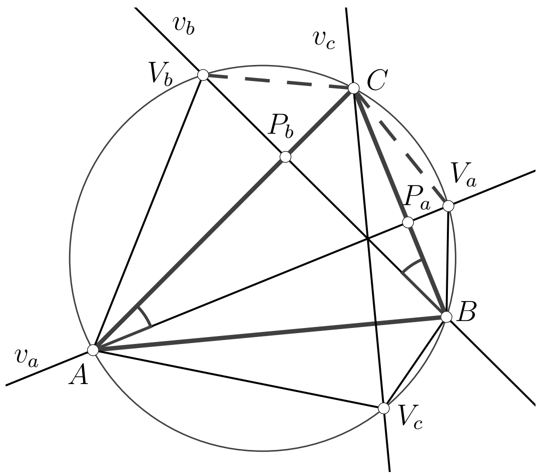
Obr. 5: Shodné úhly

Leží-li body E, F uvnitř stran trojúhelníku, leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou CI, proto stačí ukázat, že součet velikostí úhlů CFI, CEI je $180°$: $|\sphericalangle CFI| = 180° - |\sphericalangle AFI|$, $|\sphericalangle CEI| = 180° - |\sphericalangle BEI|$, $|\sphericalangle CFI| + |\sphericalangle CEI| = 180° - |\sphericalangle ADI| + 180° - |\sphericalangle BDI| = 180°$.

Leží-li jeden z bodů E, F vně strany trojúhelníku, leží oba body v téže polorovině s hraniční přímkou CI, a v tom případě ukážeme, že úhly CFI, CEI jsou shodné: Nechť F leží vně AC, $|\sphericalangle CFI| = |\sphericalangle AFI|$. $|\sphericalangle CFI| = |\sphericalangle ADI| = 180° - |\sphericalangle BDI| = 180° - |\sphericalangle BEI| = |\sphericalangle CEI|$.

Splývá-li některý z bodů E, F s bodem C, tvrzení platí triviálně. Oba body E, F nemohou ležet zároveň vně trojúhelníku, protože by nebyla splněna trojúhelníková nerovnost. □

Úloha 2.5. *Nechť výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC na strany a, b, c protínají kružnici trojúhelníku opsanou po řadě v bodech V_a, V_b, V_c. Dokažte, že tětivový šestiúhelník $AV_cBV_aCV_b$, má strany po dvou shodné.*

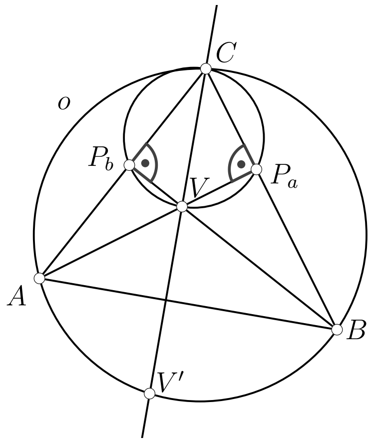


Obr. 6: Tětivový šestiúhelník

Řešení. Trojúhelník ABC je ostroúhlý, proto výšky protínají odpovídající strany v jejich vnitřních bodech, stejně tak jako kratší oblouky opsané kružnice nad těmito stranami. Tvrzení říká, že ze čtyř stran BV_a, V_aC, CV_b, V_bA mají být alespoň dvě shodné a z vhodného náčrtku (obr. 6) vidíme, že zřejmě budeme dokazovat shodnost stran CV_a, CV_b.

Podíváme-li se na Tvrzení 1.3, jsme téměř hotovi. Z podobnosti trojúhelníků CBP_b, CAP_a a toho, že vrcholy A, B leží na tomtéž oblouku nad tětivou V_aV_b, plyne shodnost úhlů CBV_b, CAV_a, a tedy i shodnost tětiv CV_b, CV_a. Podobně dokážeme $|BV_a| = |BV_c|$ a $|AV_b| = |AV_c|$. □

Poznámka 2.6. *Body V_a, V_b, V_c v úloze 2.5 jsou obrazy průsečíku V výšek trojúhelníku ABC v osových souměrnostech po řadě podle jeho stran a, b, c. Tuto znalost jsme v důkazu nepotřebovali, ale neškodí si ji připomenout.*



Obr. 7: Osově souměrný obraz ortocentra dle strany na kružnici opsané

Obrázek 7 ilustruje důkaz tvrzení pro bod V', který je obrazem ortocentra V v osové souměrnosti podle strany $c = AB$ v ostroúhlém trojúhelníku. V něm leží body C, V' v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB. Podle Tvrzení 1.2 leží body P_a, V, P_b, C na kružnici (v ostroúhlém trojúhelníku tam leží v uvedeném pořadí), proto $|\sphericalangle P_aVP_b| + |\sphericalangle P_aCP_b| = 180°$. Ale z osové souměrnosti s osou AB plyne, že $|\sphericalangle AV'B| = |\sphericalangle AVB|$, a z vlastnosti vrcholových úhlů $|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle P_aVP_b|$, tedy také $|\sphericalangle AV'B| + |\sphericalangle ACB| = 180°$ a bod V' leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

SOUSTAVY ROVNIC S ABSOLUTNÍMI HODNOTAMI A PARAMETREM

Luboš Pick

V matematické olympiádě a podobných soutěžích se občas objevují úlohy, v jejichž zadání nalézáme soustavu rovnic obsahující absolutní hodnoty a případně ještě jeden nebo více reálných parametrů. Tato problematika představuje zajímavou a bohatou oblast, v níž se mohou efektivně uplatnit rozmanité a zdánlivě spolu nesouvisející dovednosti. Na své si přijdou jak milovníci algoritmických řešení, tak kreativci všech typů, úlohy skýtají zábavu jak zapřisáhlým „algebraikům", tak i skalním „geometrům". Šanci dostane dyspinxik i dyskalkulik. Úlohy lze obvykle řešit buď algoritmickými postupy založenými na rozboru případů, které jsou sice pracné, ale zaručeně vedou k výsledku, nebo ad hoc konstrukcemi všeho druhu založenými na pozorováních, která algoritmizovat nelze a která se liší úlohu od úlohy.

Zajímavou rozmanitostí se vyznačují už samotná zadání. Zadavateli úlohy obvykle nestačí, abychom rovnici nebo soustavu rovnic prostě vyřešili, ale často se nás ptá na to, při jakých hodnotách parametru mají řešení jisté vlastnosti. To je i případ úlohy 70-B-I-4 matematické olympiády, jejíž zadání zní takto:

Zjistěte, pro které hodnoty parametru k má soustava rovnic

$$\begin{aligned} |x+6| + 2|y| &= 24,\\ |x+y| + |x-y| &= 2k \end{aligned}$$

lichý počet řešení v oboru reálných čísel.

1 Základní nářadí

1.1 Nulové body

Základní matematická dovednost, bez které se při práci s operací absolutní hodnoty neobejdeme, je metoda nulových bodů. Vychází z jednoduchého pozorování: absolutní hodnoty, jakožto jakési přidané nepříjemnosti, se v rovnici můžeme zbavit, ale musíme k tomu vědět, jakého znaménka je výraz uvnitř. Je-li výraz uvnitř absolutní hodnoty v nějakém smyslu spojitě závislý na proměnné, proměnných, parametrech a podobně, pak nalezením kořenu tohoto výrazu určíme bod (můžeme mu říkat nulový), který má tu vlastnost, že nalevo od něj jsou věci jinak, než napravo. Posuďme následující jednoduchou úlohu.

Úloha 1.1. *Řešte rovnici* $|4x-2|+|x-2|=6$.

Řešení. Zadání obsahuje dva výrazy s absolutními hodnotami, nulovými body jsou $x=\frac{1}{2}$ a $x=2$. Ty rozdělují reálnou přímku na tři intervaly, na nichž posoudíme úlohu zvlášť. Řešíme tedy sice tři rovnice, ale za to hodně jednoduché. Pozor musíme dávat jen na to, aby případný kořen, který nám vyjde, ležel ve správném intervalu.

Nejprve předpokládejme, že $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$. (Povšimněme si uzavřenosti vpravo – žádné reálné číslo totiž nesmíme vynechat.) Potom zadaná rovnice přejde v $2-4x+2-x=6$, tedy $-2=5x$, tedy $x=-\frac{2}{5}$. Teď přijde na řadu jediná zajímavá část postupu – inspekce, zda je získaný kandidát na řešení legální. Protože ale $-\frac{2}{5} \in (-\infty, \frac{1}{2})$, máme první řešení.

Nyní předpokládejme, že $x \in (\frac{1}{2}, 2]$. Potom řešíme rovnici $4x-2+2-x=6$, tedy $3x=6$, tedy $x=2$. Bod $x=2$ opět leží v intervalu (sice jen tak tak, ale díky naší volbě uzavřenosti vpravo tam je), a tedy představuje druhé řešení úlohy.

Zbývá posoudit případ, kdy $x \in (2, \infty)$. Potom řešíme rovnici $5x-4=6$, tedy $x=2$. O tomto řešení již víme, a ještě ke všemu $2 \notin (2,\infty)$. Každopádně v tomto třetím kroku nedostáváme nic nového.

Závěr: úloha má dvě řešení, a to $x=-\frac{2}{5}$ a $x=2$. □

1.2 (Geo)metrický pohled na věc

Bude užitečné si uvědomit, že absolutní hodnota hraje na množině reálných čísel roli *metriky*, tedy vzdálenosti. Jakkoli výraz „metrika“ do středoškolské matematiky nepatří, je intuitivně jasné, že napíšeme-li $|x+1|=4$, pak tím vlastně říkáme, že bod x se nalézá ve vzdálenosti 4 od bodu -1, a to buď směrem doleva, nebo směrem doprava. Přiložíme pravítko a vidíme, že řešeními uvedené rovnice jsou body $x=-5$ a $x=3$. Ještě zajímavější situace nastane, napíšeme-li $|x+1| \leq 4$. Co říkáme teď? Nyní může být bod x vzdálen od bodu -1 o 4 jednotky (samozřejmě opět dvěma různými směry), ale může ležet i blíže. Řešením uvedené nerovnice je uzavřený interval $[-5,3]$. No a co když napíšeme $|x+1|>4$? Pak je řešením sjednocení otevřených intervalů $(-\infty,-5) \cup (3,\infty)$.

1.3 Nerovnosti a odhady

Metoda nulových bodů a následný rozbor případů vždy vedou k výsledku. Potíž je v tom, že to může být cesta velmi pracná a někdy zbytečně náročná. Nezapomeňme, že jedním z klíčových parametrů bývá čas. Téměř vždy proto stojí za to dříve, než se bezhlavě vrhneme do hledání nulových bodů a posuzování jednotlivých odpovídajících případů, se zamyslet, jestli si nemůžeme nejprve nějak zjednodušit situaci. Posuďme následující úlohu.

Úloha 1.2. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$|x-5|+|y-9|=6,$$
$$|x^2-9|+|y^2-5|=52.$$

Řešení. Čtenář mi dá za pravdu, že teď je situace podstatně zapeklitější, než v úloze 1.1. Soustava obsahuje dvě nezávislé proměnné a k tomu ještě kvadratické členy. Metoda nulových bodů by jistě fungovala. Nulové body snadno určíme, jsou to $x=-3,3,5$ a $y=-\sqrt{5},\sqrt{5},9$. Jenomže x a y jsou na sobě nezávislé, a tedy bychom museli posoudit všechny kombinace, to jest devět různých soustav kvadratické a lineární rovnice. To je úplně jiná úroveň, než hledání řešení tří triviálních lineárních rovnic pro jednu proměnnou, jemuž jsme se věnovali v úloze 1.1. Přitom většinu ze zmíněných devíti případů lze předem vyloučit, a to téměř bez námahy. Jen je k tomu potřeba uvědomit si jednoduchý fakt: absolutní hodnota jakéhokoli výrazu je vždy nezáporná. To nám umožňuje pracovat s odhady a nerovnostmi, ačkoli zadání úlohy žádnou nerovnost neobsahuje.

Tak například jestliže v první rovnici zapomeneme první (nezáporný) člen, levá strana se nemůže zvětšit. To lze zapsat ve formě nerovnosti $|y-9|\le 6$. A jak víme z oddílu 1.2, odtud plyne $y\in[3,15]$. Protože $3\ge\sqrt{5}$, dva ze tří nulových bodů proměnné y nás vůbec nemusí zajímat. Toto pozorování ale můžeme využít ještě lépe. Uvědomíme si, že $y\in[3,15]$ implikuje $y^2\in[9,225]$, tedy každopádně $y^2>5$. V důsledku této jednoduché úvahy můžeme odstranit absolutní hodnotu z výrazu y^2-5 ve druhé rovnici. Druhá rovnice tak přejde do tvaru $|x^2-9|+y^2=57$, což využijeme analogickou úvahou k závěru, že $y^2\le 57$, tedy $y\le\sqrt{57}$, takže $y<9$. Tudíž se i v první rovnici ve výrazu $|y-9|$ absolutní hodnoty zbavíme. První rovnice tak přejde do tvaru $|x-5|-y=-3$, což nám pro změnu, díky odhadu $y\le\sqrt{57}<8$, dá vymezení také pro proměnnou x, a to $|x-5|<5$, to jest $x\in(0,10)$. A teď teprve má smysl použít metodu nulových bodů. Soustava změnila podobu na

$$|x-5|-y=-3,$$
$$|x^2-9|+y^2=57.$$

Místo devíti případů budeme posuzovat jen tři, přesněji $x \in (0,3]$, $x \in (3,5]$ a $x \in (5,10)$, a snadno dospějeme k výsledku (ve všech případech nejprve vyjádříme z první rovnice y pomocí x, potom získaný výraz dosadíme do druhé rovnice, dostaneme buď lineární, nebo kvadratickou rovnici pro proměnnou x, kterou vyřešíme, a nakonec prověříme, zda získané kořeny leží ve správném intervalu). Úloha má dvě řešení: $[x,y] = [1,7]$ a $[x,y] = [4\sqrt{2}+1, 4\sqrt{2}-1]$. □

Stává se, že už samo řešení úlohy záměrně testuje naši pozornost. V zadání jedné z návodných úloh domácího kola 64. ročníku matematické olympiády čteme:

Úloha 1.3. *Nechť pro reálná čísla x a y platí $|x^2+4| + |y^2-65| = 20$. Potom $x \in [-4,4]$ a $y \in [-9,-7] \cup [7,9]$. Dokažte.*

Řešení. První krok, který bychom měli učinit dříve, než začneme cokoli počítat, je povšimnout si, že ve výrazu $|x^2+4|$ je absolutní hodnota pro ozdobu (zadání je nejspíš míněno jako jakýsi chyták), a lze ji bez ztráty prostě vyhodit. Úloha se změní na rovnici $x^2 + |y^2-65| = 16$, takže díky nezápornosti výrazu $|y^2-65|$ ihned dostáváme $x^2 \leq 16$, a tedy první požadovaný výrok $x \in [-4,4]$. Obdobnou úvahou dostaneme $|y^2-65| \leq 16$, tedy $y^2 \in [49,81]$ (všimněme si, jak si dal autor úlohy záležet, aby nám to hezky vyšlo, a vzdejme mu tichý hold). Odtud ihned plyne druhé dokazované tvrzení. □

2 Jak se vypořádat se závislostí (na parametru)

Je načase vpustit do hry nový prvek, a sice jeden nebo více reálných parametrů. Jak uvidíme, počet užitečných dovedností se stále rozšiřuje.

2.1 Vlastnosti koeficientů mnohočlenu

Bude se nám hodit následující klasická poučka.

Věta 2.1. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kořeny polynomu $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ a $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, potom*

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &= -a_{n-1}, \\ (-1)^n x_1 \cdots x_n &= a_0. \end{aligned}$$

Posuďme následující úlohu.

Úloha 2.2. *Určete všechna reálná čísla p, pro něž má rovnice*

$$(x-1)^2 = 3|x| - px$$

právě tři různá řešení v oboru reálných čísel.

Řešení. Jediným nulovým bodem je $x = 0$. Tato hodnota není řešením úlohy pro žádné $p \in \mathbb{R}$, můžeme se tedy omezit na rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + (p+1)x + 1 = 0, &\quad x < 0, \\ x^2 + (p-5)x + 1 = 0, &\quad x > 0. \end{aligned}$$

Nejprve si uvědomíme, že má-li některá z uvedených rovnic dva různé kořeny, pak jsou tyto kořeny nenulové a stejného znaménka. To vyplývá z aplikace druhého tvrzení věty 2.1 na případ $n = 2$ a z toho, že obě rovnice mají kladný prostý člen. Z tohoto pozorování vyvodíme, že má-li mít úloha tři řešení, pak musí mít jedna z rovnic dva různé kořeny a druhá jeden dvojnásobný. To by samo o sobě ještě nestačilo, musíme navíc ohlídat, aby všechny tyto kořeny měly správná znaménka. Podle speciálního případu prvního tvrzení věty 2.1 je ovšem koeficient u x u každého z našich dvou kvadratických trojčlenů roven součtu kořenů s opačným znaménkem. Odtud dostaneme podmínky $p + 1 > 0$ a $p - 5 < 0$, tedy $p \in (-1, 5)$. V rámci tohoto omezení nám tudíž pak již stačí posoudit diskriminanty obou rovnic, tedy $(p+1)^2 - 4$ u první rovnice a $(p-5)^2 - 4$ u druhé. Má-li být počet řešení roven třem, musí být právě jeden z těchto diskriminantů roven nule a zároveň druhý musí být kladný. Nulovost diskriminantů dává čtyři možnosti, a sice $p \in \{-3, 1, 3, 7\}$. Z těch ale v intervalu $(-1, 5)$ leží pouze $p = 1$ a $p = 3$. Protože v obou těchto případech je zbývající diskriminant kladný, jsou hledanými hodnotami parametru $p = 1$ a $p = 3$. □

2.2 Symetrie

V tomto oddílu uvedeme další z řady nealgoritmizovatelných dovedností, kterou stojí za to si osvojit. Jde o pozorování nejrůznějších nenápadných symetrií, které nám mohou velmi usnadnit práci. Pohleďme například na následující úlohu.

Úloha 2.3. *Rozhodněte, pro které hodnoty parametru b má soustava rovnic*

$$\begin{aligned} |2x - y| + |2x + y| &= 12, \\ |y + 1| + |x| &= b \end{aligned}$$

lichý počet řešení.

Řešení. Metodou nulových bodů se dá samozřejmě úloha vyřešit. Bude to ale stát spoustu času a úsilí. Přitom však není těžké vypozorovat, že je-li dvojice $[x, y]$ řešením soustavy, pak je jejím řešením také dvojice $[-x, y]$. To znamená, že řešení chodí zásadně po dvou, přičemž jedinou výjimku tvoří $x = 0$. Z toho ovšem ihned plyne, že s jinými případy, než $x = 0$, se není třeba zdržovat. Položíme tedy $x = 0$ a dostaneme podstatně jednodušší soustavu

$$
\begin{aligned}
|y| &= 6, \\
|y+1| &= b,
\end{aligned}
$$

kterou snadno vyřešíme. Úloha má tedy lichý počet řešení právě tehdy, když $b = 5$, nebo $b = 7$. $\square$

3 Grafická metoda řešení

Všechna možná řešení rovnice obsahující dvě proměnné lze často s výhodou ilustrovat jako množinu bodů roviny, které této rovnici vyhovují. Řešení soustavy rovnic pak tedy odpovídá průnik dvou takových množin. Výhoda tohoto přístupu spočívá v tom, že nám skýtá jakousi geometrickou představu o tom, jak by případná řešení mohla vypadat, případně kde by se mohla nalézat. Metodu lze využívat i v případech, kdy jsou rovnice závislé na parametrech, je jen zapotřebí působení parametru správně popsat. Obvykle jde o nějaké posuvy nebo nafukování.

3.1 Rozcvička

Pro představu o tom, jak budou množiny řešení vypadat, se nejprve rozcvičme na jednoduchých příkladech.

Úloha 3.1. *Nechť $k > 0$. Graficky znázorněte množiny bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňující*

(a) $|x| + |y| = k$,

(b) $|x - 3| + 2|y| = 2k$,

(c) $|x + y| + |x - y| = 2k$,

(d) $|x + 2y| + |x - 2y| = 4k$.

Řešení. Měly by nám vyjít následující množiny:

(a) hranice čtverce s vrcholy $[k, 0]$, $[0, k]$, $[-k, 0]$, $[0, -k]$,

(b) hranice kosočtverce s vrcholy $[2k+3,0]$, $[3,k]$, $[-2k+3,0]$, $[3,-k]$,

(c) hranice čtverce s vrcholy $[k,k]$, $[-k,k]$, $[-k,-k]$, $[k,-k]$,

(d) hranice obdélníka s vrcholy $[2k,k]$, $[-2k,k]$, $[-2k,-k]$, $[2k,-k]$.

$\square$

Jestli nám bude uznáno čistě obrázkové (vznešeněji řečeno grafické) řešení, je otázka filosofická. Odpověď na ni pravděpodobně závisí na míře tolerance jednotlivých hodnotitelů, apriori vyloučeno to není. Naprosto jisté však je, že i nepatrný náčrtek skýtající správný geometrický náhled na chování a případně i na pohyb jednotlivých množin nám může velmi pomoci při následném sepisování řešení algebraického (které nám rozhodně uznáno bude, bude-li korektní).

3.2 Po částech lineární funkce

V zadání následující úlohy se objevuje nový prvek – máme vyšetřovat jistou vlastnost funkce v závislosti na dvou reálných parametrech. Geometrický náhled opět rozhodně nebude na škodu, prolíná se řešením jako pověstná červená nit.

Úloha 3.2. *Pro která reálná čísla a, b je funkce*

$$f(x) = a|x-1| + b(x-3) + |x-b| + x - 1$$

omezená na $\mathbb{R}$?

Řešení. Funkce f je *po částech lineární*, a to bez ohledu na hodnoty parametrů a a b, takže je omezená na každém omezeném intervalu. To znamená, že stačí funkci f vyšetřit pouze pro hodně velké a pro hodně malé hodnoty proměnné x, přesněji pro $x \leq \min\{1,b\}$ a pro $x \geq \max\{1,b\}$ (nezapomeňme, že o vztahu b k jedničce nic nevíme). Jest

$$\begin{aligned} f(x) &= (b-a)x - 2b + a - 1 \quad \text{pro } x \leq \min\{1,b\}, \\ f(x) &= (a+b+2)x - a + 4b - 1 \quad \text{pro } x \geq \max\{1,b\}. \end{aligned}$$

Nyní je třeba si uvědomit, že na neomezeném intervalu je lineární funkce omezená právě tehdy, když je konstantní. To v našem případě nastane právě tehdy, když $b-a = 0$ a zároveň $a+b+2 = 0$ (vše ostatní v předpisu, který definuje funkci f, je balast).

Závěr: funkce f je omezená na $\mathbb{R}$ právě tehdy, když $a = b = -1$. Pro tyto hodnoty parametrů jest $f(x) = |x+1| - |x-1| + 2$. Nyní si prosím načrtněte graf této funkce. Vypadá, že by mohla být omezená? $\square$

3.3 Grafické řešení úlohy 2.2

Podívejme se teď na to, zda a jak by nám mohl grafický náhled na věc pomoci vyřešit úlohu 2.2. Pozor, úloha obsahuje parametr, musíme tedy nejprve správně pochopit, jak se na obrázku projeví jeho změna.

Porovnejme funkci $f(x) = (x-1)^2$, jejímž grafem je směrem vzhůru otevřený oblouk paraboly s vrcholem v bodě $[1,0]$, s jednoparametrickou rodinkou funkcí $g_p(x) = 3|x| - px$, jejichž grafy jsou lomené čáry s jedním zlomem, jenž vždy sídlí v počátku.

Položme si otázku, za jakých okolností mohou mít tyto dva grafy právě tři průsečíky. Snadno zjistíme, že k tomu je zapotřebí, aby jedno rameno grafu g_p bylo tečnou paraboly tvořící graf f a druhé její sečnou. Z náčrtku je zřejmé, že pravé rameno, které mimochodem má rovnici $y = (3-p)x$, může být tečnou paraboly jedině tehdy, když si lehne na podlahu, což odpovídá hodnotě $p = 3$. Levé rameno grafu g_p má rovnici $y = (-3-p)x$, takže má-li být tečnou paraboly, je třeba, aby rovnice $(-3-p)x = (x-1)^2$ měla dvojnásobný záporný kořen. Posouzením diskriminantu (kvadratická rovnice pro p) dojdeme k závěru, že rovnice má dvojnásobný kořen právě tehdy, když buď $p = 1$, nebo $p = -3$. Pro $p = -3$ je ale odpovídající kořen kladný, a proto tento případ musíme vyloučit. Zbývá ověřit, že v obou případech $p = 1$ a $p = 3$ je zbývající rameno sečnou paraboly.

3.4 Grafické řešení úlohy 2.3

Podobně jako v předcházejícím oddílu se můžeme grafickou metodou pustit také do řešení úlohy 2.3. Opět nám půjde o průnik dvou geometrických obrazců, tentokrát ale chceme, aby tento průnik měl lichý počet prvků. Vzpomeneme si na rozcvičku a vidíme, že grafem první rovnice je hranice obdélníka s vrcholy $[3,6], [-3,6], [-3,-6], [3,-6]$, zatímco grafem druhé rovnice je hranice čtverce se středem $[0,-1]$ a vrcholy $[b,-1], [0,b-1], [-b,-1], [0,-b-1]$. (Možná nebude od věci si povšimnout, že díky druhé rovnici musí být b nezáporné, takže čtverec je opravdu skoro vždy čtvercem, pouze v jediném případě je mu dovoleno zdegenerovat do bodu.)

Kreslíme si a pozorujeme, jak se tento čtverec nafukuje či naopak smršťuje při různých hodnotách b. Přitom nezapomínáme vnímat rozličné symetrie, jak jsme se naučili v oddílu 2.2. Zanedlouho dojdeme k závěru (pozor, nula je sudá!), že průnik obou obrazců má lichý počet prvků právě tehdy, když si jižní vrchol čtverce sedne na podlahu obdélníku, nebo když naopak severní vrchol ťukne do stropu. Pak už není těžké odměřit, že tyto případy odpovídají po řadě hodnotám $-b-1=-6$ a $b-1=6$, tedy $b=5$ a $b=7$.

Literatura

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

ROVNOBĚŽKY

Alena Skálová

Potkáme-li se s planimetrickou úlohou, ve které máme za cíl dokázat, že nějaké vzdálenosti (či jejich kombinace) se rovnají vzdálenosti jiné, podobně jako v úloze 70-B-I-5 matematické olympiády

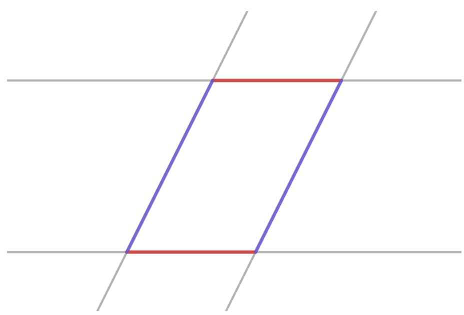
Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB postupně v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$,

či pokud obecně zkoumáme vztahy mezi délkami úseček, prvním užitečným krokem bývá odhalit, zda se dotčené vzdálenosti nevyskytují i někde „jinde“. K tomu lze samozřejmě použít lecjakou pokročilou techniku, my si ovšem vystačíme se základy – tedy s rovnoběžností, symetrií, případně dopočítáním úhlů.

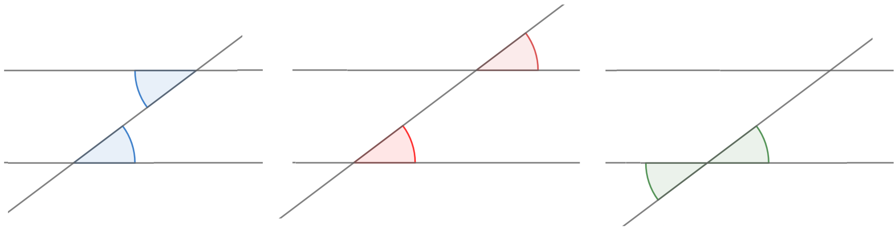
1 Základy

Připomeňme si některé užitečné vlastnosti rovnoběžek. Třetí bod je vskutku triviální, ale je dobré mít ho při řešení úloh na paměti.

- Rovnoběžník je definován jako takový čtyřúhelník, jehož protilehlé strany jsou rovnoběžné.
- Pro rovnoběžník platí, že délky jeho protějších stran jsou shodné.
- Tím pádem, pokud se protnou dvě dvojice rovnoběžek, vytvoří jejich průsečíky rovnoběžník a protilehlé úsečky mají stejnou délku.



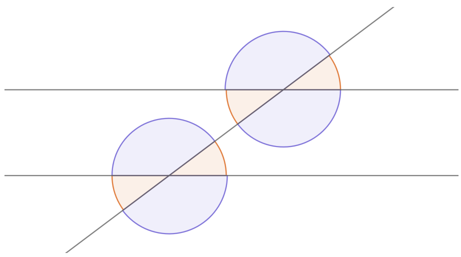
Definice 1.1 (Střídavé, souhlasné a vrcholové úhly)**.** *Mějme dvojici přímek a k nim třetí, různoběžnou přímku. Dvojice úhlů na následujícím obrázku postupně nazýváme*



střídavé (modře), souhlasné (červeně) a vrcholové (zeleně) úhly.

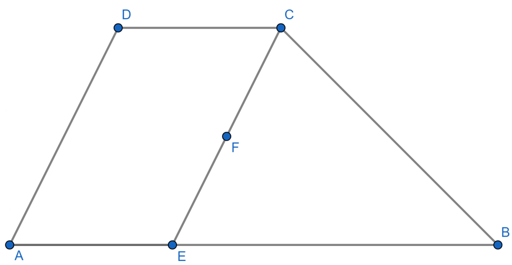
Lémma 1.2. *Je-li výchozí dvojice přímek v definici 1.1 navzájem rovnoběžná, mají všechny odpovídající si dvojice úhlů (střídavé, souhlasné, vrcholové) stejnou velikost.*

Tím pádem – načrtneme-li úhly dvou rovnoběžek a je protínající různoběžku do jednoho obrázku – platí, že všechny oranžové úhly jsou shodné a stejně tak jsou shodné všechny fialové úhly.



2 Úlohy

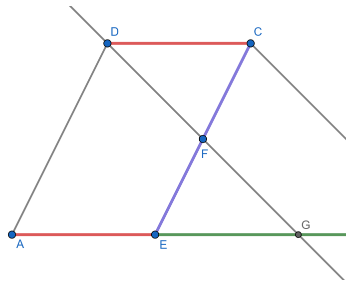
Úloha 2.1. *Lichoběžník $ABCD$ je úsečkou CE rozdělen na trojúhelník a rovnoběžník, vizte obrázek.*



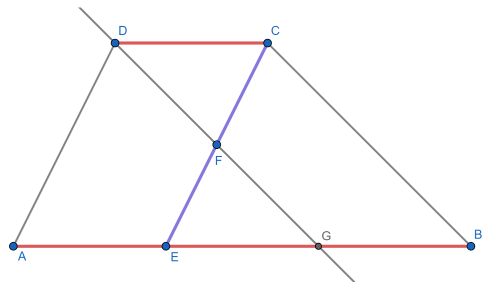
Dále předpokládáme, že bod F je středem úsečky CE a přímka DF prochází středem úsečky BE. Jaký je poměr délek úseček $|DC| : |AB|$?

Řešení. Nejprve si dokresleme i přímku DF, zmíněnou v zadání. Její průsečík s AB označme G.

O kterých úsečkách už víme, že mají stejnou délku? Jelikož F půlí úsečku CE, platí $|CF| = |FE|$ (v nákresu fialově). Obdobně hned ze zadání dostáváme $|GE| = |GB|$ (zeleně). Dále se rovná $|AE| = |DC|$ (červeně), neboť $AECD$ je dle zadání rovnoběžník.



Jelikož body F a G jsou po řadě středy úseček CE a BE, je úsečka FG střední příčkou trojúhelníka CEB, a tím pádem $FG \parallel CB$. Čtyřúhelník $DGBC$ je tedy rovnoběžník, z čehož vyplývá $|DC| = |GB|$.



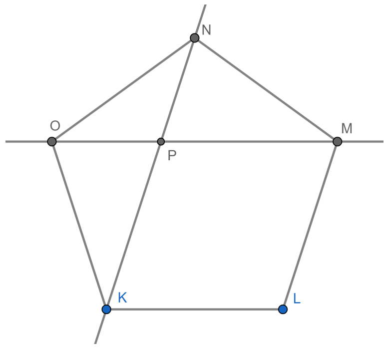
Teď již stačí jen všechny získané vztahy poskládat dohromady. Máme tedy $|EG| = |GB| = |DC| = |AE|$, a jelikož

$$|AB| = |AE| + |EG| + |GB| = 3 \cdot |DC|,$$

je hledaný poměr $|DC| : |AB|$ roven $1 : 3$. $\square$

Úloha 2.2. *V pravidelném pětiúhelníku $KLMNO$ označme P průsečík přímek KN a OM. Dokažte, že $|KN| = |NO| + |OP|$.*

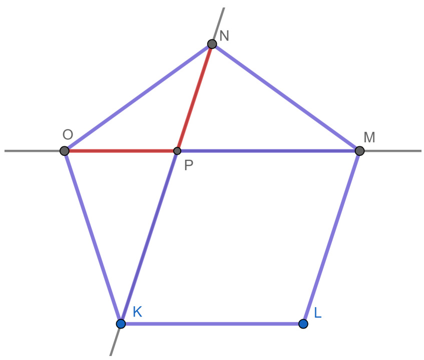
Řešení. Začněme náčrtkem.



Přímka KN je rovnoběžná s LM, což zdůvodníme například osovou symetrií pravidelného pětiúhelníka podle osy kterékoliv z jeho stran, v tomto případě úsečky LM. Dvojice bodů K a N, resp. L a M jsou si navzájem svými obrazy ve zmíněné osové symetrii, tedy obě přímky KN i LM jsou na osu strany LM kolmé. Tudíž skutečně $KN \parallel LM$. Alternativně bychom pro důkaz rovnoběžnosti mohli dopočítat velikosti úhlů $|\sphericalangle LMP|$ a $|\sphericalangle KLM|$, zkuste si!

Obdobně dokážeme, že $OM \parallel KL$. Čtyřúhelník $KLMP$ je tudíž rovnoběžník, a jelikož $|KL| = |LM|$ (strany pravidelného mnohoúhelníku mají stejnou délku), jsou všechny jeho strany shodné (níže na obrázku modře).

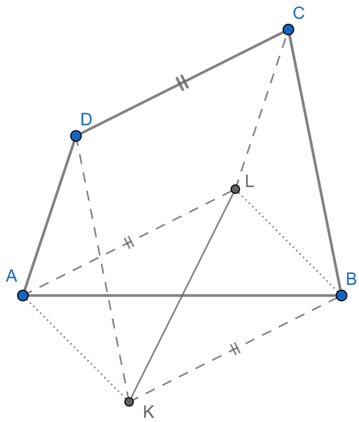
Z pravidelnosti pětiúhelníku $KLMNO$ dále vyplývá: $|MO| = |KN|$, a jelikož už víme, že $|PM| = |PK|$, dostáváme $|OP| = |NP|$ (červeně).



Teď již máme všechny potřebné ingredience k řešení. Postupně jsme dokázali rovnost $|KN| = |KP| + |PN| = |NO| + |OP|$. $\square$

Úloha 2.3. *Mějme obecný čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojme bod K, který je vrcholem rovnoběžníku $BCDK$, a bod L, který je vrcholem rovnoběžníku $CDAL$. Ukažte, že přímka KL prochází středem úsečky AB.*

Řešení. Ze zadání plyne, že úsečky CD, BK a AL jsou rovnoběžné, a navíc shodné.



Body K, L leží v opačných polorovinách od přímky AB, tím pádem shodné úsečky AL a BK rovněž leží v opačných polorovinách od přímky AB, takže $AKBL$ je rovnoběžník.

Pro úhlopříčky rovnoběžníku platí, že se navzájem půlí, tudíž přímka KL skutečně prochází středem strany AB. □

2.1 K procvičení

Úloha 2.4. *Nechť K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že $|KL| + |LM| = |MN| + |NK|$.*

Návod. Dokažte prve, že $KLMN$ je rovnoběžník. □

Úloha 2.5. *Nechť D je střed strany AB trojúhelníku ABC a E bod jeho strany AC, pro který platí $|AE| = 2|CE|$. Označme F průsečík přímek BE a CD. Dokažte, že platí $|BE| = 4|EF|$.*

Úloha 2.6. *Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC. Dále označme F střed úsečky AD a G průsečík CD s EF. Dokažte, že $|EG| = |GF|$.*

Literatura

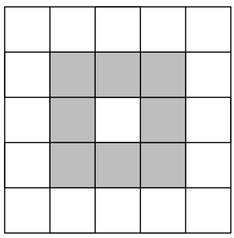
[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

LODĚ, TANKY A KRÁLOVÉ

Antonín Slavík

Zadání úlohy 70-B-I-6 matematické olympiády je velmi atraktivní, připomíná známou námořní bitvu na čtverečkovaném papíru nebo některé počítačové hry:

Na plánu o rozměrech 12×12 *čtverečků se nachází loď tvořená osmi políčky podél obvodu čtverce* 3×3 *(na obrázku je vyznačena šedou barvou). Na kolik nejméně políček je potřeba vystřelit, abychom s jistotou zasáhli loď alespoň jednou?*



Obrázek 1: Tvar lodi v soutěžní úloze

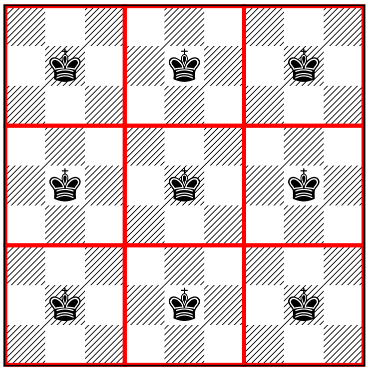
Řešení úlohy nevyžaduje složité výpočty, stačí dobrý nápad a chvíle experimentování.

1 Králové na šachovnici

Ukažme si úlohu, jejíž zadání vypadá na první pohled odlišně, ale princip řešení je velmi podobný.

Úloha 1.1. *Král je šachová figura, která se v jednom tahu může posunout o jedno pole ve vodorovném, svislém nebo diagonálním směru. Jaký minimální počet králů musíme umístit na šachovnici o rozměrech* 9×9 *tak, aby společně ohrožovali všechna pole? (Král ohrožuje pole, na kterém stojí, nebo na které se může dostat pomocí jednoho tahu.)*

Řešení. Obrázek 2 ukazuje devět králů, kteří ohrožují všechna pole šachovnice 9×9. Každý z nich totiž ohrožuje všechna pole čtverce 3×3, v jehož středu stojí (na obrázku jsou čtverce vyznačeny barevně). Menší počet králů nestačí – pokud by v některém čtverci 3×3 nebyl žádný král, pak prostřední pole tohoto čtverce nebude ohroženo.



Obrázek 2: Devět králů ohrožuje všechna pole šachovnice 9×9

Je možné použít i mírně odlišné zdůvodnění, které je užitečné při řešení podobné úlohy na šachovnicích o jiných rozměrech: Žádný král nemůže ohrozit více než jedno políčko z těch, na kterých stojí králové z obr. 2. Z toho plyne, že méně než devět králů nemůže stačit. □

Jako cvičení si čtenář může zkusit vyřešit podobnou úlohu na šachovnicích 7×7, 8×8, resp. obecněji $n \times n$; řešení lze najít v článku [Chy], kde jsou uvažovány i jiné šachové figury.

2 Pohyblivý tank na šachovnici

Budeme pokračovat některými náročnějšími problémy, které volně souvisejí se soutěžní úlohou 70-B-I-6. Následující úloha je převzata z [Wa1], kde je řešena i obecnější verze s tankem pohybujícím se po hranách neorientovaného grafu.

Úloha 2.1. *Dobře maskovaný tank je ukryt na neznámém políčku šachovnice o rozměrech* 41×41*. K jeho zničení jsou nutné dva zásahy. V okamžiku, kdy je tank poprvé zasažen, se přesune vodorovným nebo svislým směrem na sousední políčko (zůstává však nadále neviditelný). Jaký je minimální počet střel nutných k tomu, abychom tank s jistotou zničili? (Každá střela zasáhne právě jedno políčko.)*

Řešení. Předpokládejme, že šachovnice je obarvena tak, že rohová políčka jsou černá. Celkový počet černých políček je tedy 841 a bílých políček je 840.

Pokud nejprve vystřelíme na všechna bílá políčka, poté na všechna černá a nakonec opět na všechna bílá, pak máme jistotu, že tank bude zničen; tato strategie potřebuje 2521 střel.

Ukažme, že menší počet střel nemusí stačit. Pokryjeme všechna políčka šachovnice s výjimkou jednoho (např. rohového) pomocí nepřekrývajících se domin, tj. dlaždic o rozměrech 2×1. Těchto domin je 840. Předpokládejme, že tank stojí na začátku na některém dominu a po zásahu se přesune na druhé políčko domina. Pokud bychom věděli, o které domino se jedná, ale nevěděli, na kterém ze dvou políček tank na začátku stojí, potřebovali bychom k jeho zničení 3 střely. Ve skutečnosti však správné domino neznáme, a tak potřebujeme aspoň $3 \cdot 840$ střel. Může se ovšem stát, že tank bude začínat na políčku, které není pokryto dominem. Abychom ošetřili i tento případ, musíme aspoň jednou vystřelit na nepokryté políčko. Pokud to uděláme hned na začátku, pak se po zásahu tank přesune na některé domino, kde bude v další fázi zničen. Celkem tedy potřebujeme aspoň $3 \cdot 840 + 1 = 2521$ střel. □

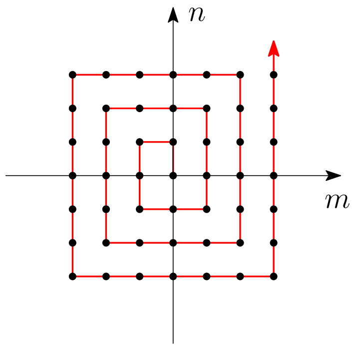
3 Loď na přímce

Následující úloha je převzata z [Wa2].

Úloha 3.1. *Na reálné ose se nachází nepřátelská loď. Víme, že vyplouvá z jistého bodu $n \in \mathbb{Z}$ a pohybuje se konstantní rychlostí $m \in \mathbb{Z}$ jednotek za sekundu (kladná hodnota znamená pohyb vpravo, záporná vlevo). Neznáme hodnoty m, n a nevíme, jakým směrem se loď pohybuje. Každou sekundu můžeme vystřelit do libovolného bodu reálné osy. Navrhněte strategii, která zaručí, že loď bude v konečném čase zničena. (Ke zničení stačí jeden zásah.)*

Řešení. Nechť loď vyplouvá z bodu n v čase $t_0 = 0$ rychlostí m. V čase t sekund ji zasáhneme právě tehdy, když vystřelíme do bodu $n + m \cdot t$. Abychom loď s jistotou zasáhli, potřebujeme postupně zkoušet všechny možné dvojice $m, n \in \mathbb{Z}$. Jak to zařídit? Dvojici m, n můžeme interpretovat jako souřadnice bodu v rovině. Stačí tedy ukázat, že všechny body v rovině s celočíselnými souřadnicemi lze seřadit do posloupnosti. Jeden možný způsob, jak toho dosáhnout, ukazuje obrázek 3. Hledaná strategie pak vypadá tak, že v čase t vezmeme t-tou dvojici (m, n) a vystřelíme do bodu $n + m \cdot t$. □

Čtenář obeznámený se základy teorie množin si jistě všiml, že strategie popsaná v řešení předchozí úlohy funguje díky tomu, že nepřátelská loď se pohybuje po bodech s celočíselnými souřadnicemi celočíselnou



Obrázek 3: Spirála procházející všemi body s celočíselnými souřadnicemi

rychlostí a množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je spočetná. Na webu [Wa2] je vyřešena i mnohem obtížnější verze úlohy, kdy polohy a rychlosti nemusejí být celočíselné a loď má kladnou délku (v naší verzi úlohy jsme loď považovali za hmotný bod).

4 Torpédování lodě

V souvislosti s ničením nepřátelských lodí nelze nezmínit následující klasickou úlohu, která je převzata z [Nah]. Jedná se o problém, který sice příliš nesouvisí s předchozími úlohami v této kapitole, zato však dokládá, jak užitečná je znalost geometrie pro kariéru v armádě.

Úloha 4.1. *Z bodu A v rovině vyplouvá nepřátelská loď a pohybuje se po polopřímce p rychlostí v_L. Máme za úkol ve stejném čase vystřelit torpédo z bodu B rychlostí $v_T > v_L$ tak, aby zasáhlo loď. Jakým směrem máme vystřelit?*

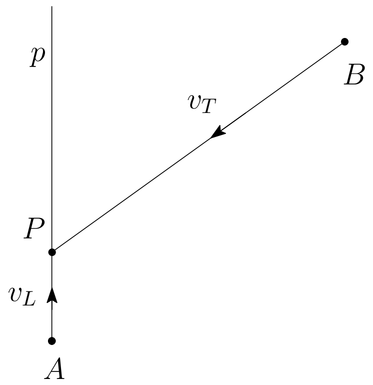
Řešení. Situaci znázorňuje obrázek 4. Naším úkolem je najít bod P, do kterého se loď i torpédo dostanou za stejný čas t.

Hledáme tedy bod P ležící na polopřímce p a splňující

$$\frac{|AP|}{v_L} = \frac{|BP|}{v_T},$$

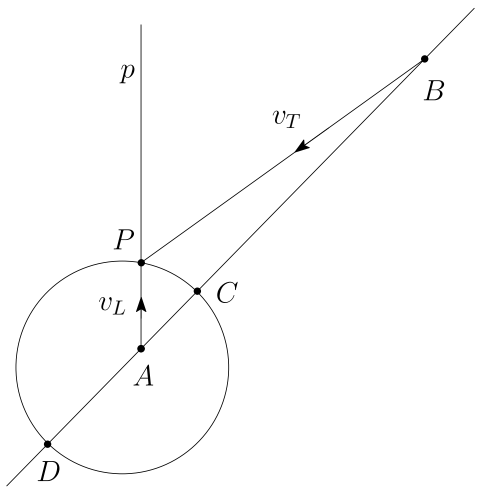
nebo ekvivalentně $\frac{|AP|}{|BP|} = k$, kde $k = v_L/v_T < 1$ je poměr rychlostí. Množina všech bodů X v rovině splňujících podmínku

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$



Obrázek 4: Loď a torpédo se střetnou v bodě P; ilustrace pro $\dfrac{v_T}{v_L} = 4$

kde $0 < k \neq 1$, je kružnice[2] (tzv. Apollóniova kružnice) nad průměrem CD, kde C, D jsou body na přímce AB splňující $\frac{|AC|}{|BC|} = k = \frac{|AD|}{|BD|}$; jeden z bodů C, D je vnitřním bodem úsečky AB, druhý jejím vnějším bodem. Hledaný bod P lze tudíž najít jako průsečík této kružnice s polopřímkou p, viz obrázek 5. $\square$



Obrázek 5: Bod P je průsečíkem Apollóniovy kružnice s polopřímkou p

[2] Tento poznatek lze odvodit např. pomocí analytické geometrie, přičemž je vhodné volit soustavu souřadnic tak, aby body A, B ležely na ose x; viz [Nah, str. 31–32]. Jiný důkaz založený na vektorovém počtu lze najít na stránce [Wi]. Důkaz využívající pouze syntetické geometrie je popsán v [Šed, str. 14–16].

Předchozí úloha bývá někdy formulována tak, že loď vyplouvající z bodu B se snaží dostihnout loď plující po polopřímce p (viz [Wi]). Pokud jsou body A, B dostatečně blízko, pak úloha může mít řešení i v případě $v_T < v_L$. Může se dokonce stát, že Apollóniova kružnice protne polopřímku ve dvou bodech – úloha pak má dvě řešení.

5 Závěr

Další úlohy související se 70-B-I-6 lze najít v archivu matematické olympiády [MO], doporučujeme zejména úlohy 58-B-I-4 a 58-B-II-2.

Literatura

[Chy] L. Chybová: *Šachové úlohy v kombinatorice.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 63 (2018), 125–147. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/147328`.

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`.

[Nah] P. J. Nahin: *Chases and Escapes. The Mathematics of Pursuit and Evasion.* Princeton University Press, 2007.

[Šed] J. Šedivý: *O podobnosti v geometrii.* Škola mladých matematiků, sv. 7. Mladá fronta, 1963. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403480`.

[Wa1] S. Wagon: *Problem of the Week 1224: War Games.* Dostupné z: `http://stanwagon.com/potw/2016/p1224.html`.

[Wa2] S. Wagon: *Problem of the Week 1164: Stop the Battleship.* Dostupné z: `http://stanwagon.com/potw/fall13/p1164.html`.

[Wi] *Wikipedia: Circles of Apollonius.* Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Circles_of_Apollonius`.

Kategorie

C

CIFERNÝ SOUČET

Antonín Jančařík

V běžné školské matematice se s ciferným součtem setkáváme především v rámci tématu Dělitelnost, kdy je ciferný součet využíván pro ověření dělitelnosti čísly 3 a 9. Zde také můžeme nalézt i alternovaný ciferný součet, který je využíván pro ověření dělitelnosti číslem 11.

Mnohem větší uplatnění mají ciferné součty v rámci rekreační matematiky. Ciferné součty jsou také často používány i v rámci soutěžních úloh v matematické olympiádě. Takové úlohy jsou řešitelné buď stanovením okrajových podmínek, výčtem prvků a rozborem jednotlivých možností, nebo popsáním hledaného čísla pomocí rovnice vycházející z dekadického rozvoje hledaného čísla. Při řešení některých úloh je nutné oba postupy kombinovat. V tomto ohledu je typická i úloha 70-C-I-1 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a.

Při řešení úloh s ciferným součtem často potřebujeme pracovat s jednotlivými číslicemi v dekadickém zápisu čísla. Abychom si tyto výpočty zjednodušili, používáme následující značení:

Nechť $a_0, a_1, a_2, ..., a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a přirozené číslo $n = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + ... + a_0$, pak značíme $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_0}$.

Samozřejmě $s(n) = a_k + a_{k-1} + ... + a_0$.

1 Odhady a výčty možností

Jak již bylo zmíněno v úvodu, typickým přístupem při řešení úloh s ciferným součtem je odhad množiny, ve které může ležet řešení a následné ověření platnosti požadované podmínky pro každý prvek z této množiny. V následujícím textu naleznete několik úloh, které tento přístup demonstrují.

Úloha 1.1. *Nalezněte trojciferné číslo n takové, že jeho ciferný součet je a) nejmenší možný, b) největší možný.*

Rozhodněte, zda je toto číslo určeno zadáním jednoznačně.

Řešení. Nechť n je trojciferné číslo.

Je zjevné, že ciferný součet trojmístného čísla n nemůže být nulový, protože první číslice čísla n v dekadickém zápise nemůže být nulová.

Pokud má být ciferný součet $s(n)$ nejmenší možný, tak jako první kandidát přichází v úvahu číslo 1. A vskutku $s(100) = 1$ a $n = 100$ je trojciferným číslem s minimálním ciferným součtem. Protože číslo s ciferným součtem 1 se musí skládat ze dvou číslic 0 a jedné číslice 1 a první číslice v dekadickém zápise čísla n musí být nenulová, je číslo $n = 100$ jediným řešením.

Na druhou stranu, dekadický zápis čísla n se skládá ze tří číslic, které jsou maximálně rovny 9. Proto ciferný součet může být maximálně $27 = 3 \cdot 9$. A vskutku, $s(999) = 27$ a $n = 999$ je zjevně jediným trojciferným číslem, jehož ciferný součet je roven 27. $\square$

Úloha 1.2. *Nalezněte trojciferné číslo dělitelné 9 takové, že jeho ciferný součet je a) nejmenší možný, b) největší možný.*

Rozhodněte, zda je toto číslo určeno zadáním jednoznačně, pokud ne, určete nejmenší a největší číslo s danou vlastností.

Řešení. Nechť n je trojciferné číslo. Víme, že číslo n je dělitelné 9, právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný 9.

Nejprve vyřešíme případ b). Největší možný ciferný součet trojmístného čísla dělitelný 9 je 27. Hledané číslo je tedy $n = 999$ a toto řešení je jednoznačné.

Nyní přistupme k případu a). Nejmenším číslem z intervalu 1 až 27, které je dělitelné 9 je číslo 9. Řešením budou všechna trojciferná čísla, jejichž ciferný součet je roven 9. Těchto čísel je více. Nejmenší z nich je číslo 108 a největší 900. $\square$

Úloha 1.3. *Nalezněte trojciferné číslo dělitelné 7 takové, že jeho ciferný součet je a) nejmenší možný, b) největší možný.*

Rozhodněte, zda je toto číslo určeno zadáním jednoznačně, pokud ne, určete nejmenší a největší číslo s danou vlastností.

Řešení. Nechť n je trojciferné číslo.

Nejprve budeme hledat číslo s nejmenším ciferným součtem.

Pokud $s(n) = 1$, tak $n = 100$ a 7 nedělí n.

Pokud $s(n) = 2$, tak $n \in \{101, 110, 200\}$, ale žádné z těchto čísel není dělitelné 7.

Přistupme k $s(n) = 3$, potom $n \in \{102, 111, 120, 201, 210, 300\}$ a pouze číslo 210 je dělitelné 7. Tedy $n = 210$ a úloha má jednoznačné řešení.

Obdobně můžeme postupovat při hledání čísla s největším ciferným součtem.

Pokud $s(n) = 27$, tak $n = 999$ a 7 nedělí n.

Pokud $s(n) = 26$, tak $n \in \{998, 989, 899\}$, ale žádné z těchto čísel není dělitelné 7.

Přistupme k $s(n) = 25$, potom $n \in \{997, 988, 979, 898, 889, 799\}$ a pouze číslo 889 je dělitelné 7. Tedy $n = 889$ a úloha má jednoznačné řešení. $\square$

Úloha 1.4. *Nalezněte čtyřciferné číslo $n = \overline{abcd}$ takové, že existují přirozená čísla k, l, m tak, že $k^2 = n = \overline{abcd}$, $l^2 = \overline{ab}$ a $m^2 = \overline{cd}$.*

Řešení. Úlohu lze samozřejmě řešit výčtem, tedy vypsáním všech 68 případů čtyřciferných druhých mocnin $(32^2, \ldots, 99^2)$, to však není nutné. Stačí si uvědomit, že podmínka ze zadání ($k^2 = 100l^2 + m^2$) je triviálně splněna, pokud $0 = m = m^2$. Ovšem středoškolská matematika nechápe nulu jako přirozené číslo. Není splněn požadavek ze zadání. Nicméně triviálním řešením jsou $n = 1600, 2500, 3600, 4900, 6400, 8100$.

Otázkou zůstává, zda neexistuje ještě jiné řešení. Pro nalezení všech řešení můžeme použít známý vztah $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$. Protože další řešení úlohy se nemůže od známých triviálních řešení lišit o více než o 100, dostáváme omezení $k < 50$. Musíme tedy ještě ověřit případ $k = 41$. Vskutku $n = 41^2 = 1681$ je dalším (a jediným netriviálním) řešením celé úlohy. $\square$

2 Využití rovností

Druhým přístupem, který můžeme při řešení úloh s ciferným součtem využít, je přepsání požadavků pomocí rovnic a nerovnic. Uvedený postup budeme demonstrovat na následující úloze:

Úloha 2.1. *Nalezněte všechna taková dvouciferná čísla, pro která platí, že jejich ciferný součet je dvojnásobkem ciferného součtu tohoto čísla zvětšeného o jeho ciferný součet.*

Řešení. Nechť $n = \overline{ab}$ je dvojciferné číslo.

Nejprve si zapíšeme podmínku ze zadání: $s(n) = 2 \cdot s(n + s(n))$.

Je zjevné, že $s(n) \leq 18$ je sudé a $s(n + s(n)) < 10$.

Nejprve předpokládejme, že druhé číslo je také dvojmístné, tedy $n + s(n) = \overline{cd}$. Tedy platí $10a + b + a + b = 10c + d$ a současně $a + b = 2(c + d)$. Úpravou první rovnice dostáváme $9a = 6c - 3d$.

Protože $\overline{cd} > \overline{ab}$ a $c + d < a + b$, tak musí platit $c > a$ a $d < b$. Protože $a + b < 20$, tak mohou nastat jen dva případy:

- $c = a + 1$
- $c = a + 2$.

Uvažujme nejprve případ $c = a + 1$. Po dosazení do $a - 1 = c$ do rovnice $9a = 6c - 3d$ dostáváme po úpravách $c + d = 3$. Mohou tedy nastat jen dvě možnosti: $\overline{cd} = 21$ a $n = 15$ a $\overline{cd} = 30$ a $n = 24$.

Nyní uvažujme případ $c = a + 2$. Po dosazení do $a - 2 = c$ do rovnice $9a = 6c - 3d$ dostáváme po úpravách $c + d = 6$. Protože $a + b = 12$, tak $n \geq 39$ a tudíž $\overline{cd} \geq 51$. Opět dostáváme dvě řešení: $\overline{cd} = 51$ a $n = 39$ a $\overline{cd} = 60$ a $n = 48$.

Zbývá nám vyřešit případ, kdy $n + s(n)$ je trojmístné, tedy $n + s(n) = \overline{1cd}$. Víme, že $a + b = 2 \cdot (1 + c + d)$ a $10a + b + a + b = 100 + 10c + d$. Po dosazení do druhé rovnice dostáváme $9a = 96 + 6c - 3d$.

Protože $a + b < 20$, musí platit $c = 0$, nebo $c = 1$ a současně $a = 8$, nebo $a = 9$. Postupně rozebereme všechny 4 možnosti:

- $c = 0$ a $a = 9$, pak $d = 5$ a $n = 93$ je řešením.
- $c = 0$ a $a = 8$, pak musí být $d = 8$ a ciferný součet $n = 80 + b$ musí být 18, což není možné.
- $c = 1$ a $a = 9$, pak musí být $d = 7$ a $n = 93$ je řešením.
- $c = 1$ a $a = 8$, pak musí být $d = 10$, což není možné.

Podmínku ze zadání splňuje následujících šest čísel: 21, 30, 51, 60, 93 a 99. $\square$

SKLÁDÁNÍ DLAŽDIC

Antonín Jančařík

V rekreační matematice se setkáváme s celou řadou úloh, které po řešiteli vyžadují doplnit tabulku dle zadaných požadavků (např. magické a latinské čtverce) či pokrýt tabulku útvary nejrůznějších tvarů (např. pentomino).

Existují dva základní přístupy, jak lze takovou úlohu řešiteli předložit. V prvním typu zadání je úloha předkládána konkrétně. Jde o nalezení konkrétního řešení pro tabulku dané velikosti. U druhého typu zadání je požadováno, aby řešitel rozhodl, pro které tabulky požadované řešení existuje. Takto formulovaná úloha je náročnější, protože od řešitele zpravidla vyžaduje nejen nalézt konkrétní řešení, ale také jeho zobecnění pro širší množinu zadání a v neposlední řadě také důkaz, proč v ostatních případech řešení není možné. Do této skupiny úloh patří i úloha 70-C-I-2 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0.

Při řešení takto formulované úlohy je cílem stanovit postačující a nutnou podmínku, kdy je zadání splněno.

Nutná podmínka je taková, která když není splněna, tak úloha nemá řešení. Pozor: splnění nutné podmínky ještě neznamená, že úloha má řešení.

Postačující podmínka je taková, která když je splněna, tak úloha má řešení. Pozor: nesplnění postačující podmínky ještě neznamená, že úloha nemá řešení.

1 Návodné úlohy

Úloha 1.1. *Určete, pro která přirozená čísla n lze nalézt n různých prvočísel tak, aby jejich součet byl sudý.*

Řešení. Nejmenším prvočíslem je číslo 2, které je zároveň jediným sudým prvočíslem.

Pro $n = 1$ tak existuje řešení, vezmeme jako prvočíslo číslo 2.

Pro $n = 2k$ je řešení nasnadě, vezmeme $2k$ různých lichých prvočísel, neboť součet sudého počtu lichých čísel je sudý.

Pro $n = 2k + 1$ je řešení také jednoduché, vezmeme číslo 2 a $2k$ různých lichých prvočísel.

Úloha má řešení pro všechna n přirozená. □

Úloha 1.2. *Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit navzájem různými prvočísly tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl sudý.*

Řešení. Z předchozí úlohy víme, že pro libovolné n přirozené lze nalézt n různých prvočísel tak, že jejich součet je sudý. Ovšem pokud je n liché, musí být mezi těmito prvočísly vždy číslo 2.

Nyní přejděme k naší úloze:

Pokud je n sudé, stačí tabulku naplnit navzájem různými lichými prvočísly a máme požadované řešení, neboť součet sudého počtu lichých čísel je sudé.

Pokud je n liché, nemůže tabulka obsahovat dva různé řádky, protože pak by v obou muselo být číslo 2 a to zadání neumožňuje. Nicméně pro $n = 1$ existuje řešení – tabulka obsahující jediné prvočíslo a to číslo 2.

Úloha má řešení pro $n = 1$ a pro všechna n sudá. □

Úloha 1.3. *Určete, pro která přirozená čísla n lze nalézt n různých prvočísel tak, aby jejich součet byl dělitelný 6.*

Řešení. Nechť $k \geq 1$ Uvažujme čísla ve tvaru $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k + 4$ a $6k + 5$. Je zjevné, že čísla ve tvaru $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$ a $6k + 4$ nemohou být prvočísly (jsou dělitelná dvěma či třemi).

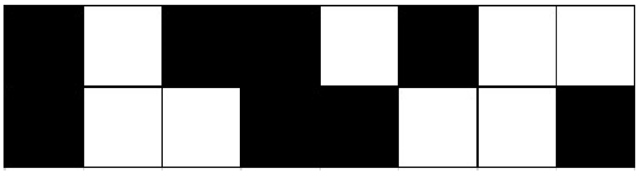
Nechť $n = 2l$, pokud sečteme l prvočísel ve tvaru $6k+1$ s l prvočísly ve tvaru $6k+5$, dostáváme číslo dělitelné šesti. Úloha tak má řešení pro n sudé.

Musíme však uvažovat ještě další dvě prvočísla, která se našemu vzoru vymykají a to čísla 2 a 3. Pokud sečteme číslo 2 se dvěma prvočísly ve tvaru $6k + 5$, dostáváme číslo dělitelné šesti. Úloha má tak řešení i pro $n = 3$, a protože má řešení i pro všechna sudá čísla, má jistě řešení i pro $n = 3 + 2, 3 + 4, \ldots$ Zjišťujeme, že úloha má řešení pro všechna $n > 3$ lichá.

Úloha má řešení pro všechna přirozená $n > 1$. □

2 Hadamardovy matice

Princip využitý pro řešení letošní úlohy z matematické olympiády je podobný principu, který použil J. J. Sylvestr pro konstrukci Hadamardových matic. Když použijeme jistá zjednodušení, tak Hadamardovou maticí rozumíme tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou vybarvena jednou či druhou barvou tak, že když dáme dva různé řádky vedle sebe, tak se barvy přesně pro polovinu polí shodují a pro druhou polovinu polí liší. Na obrázku 1 vidíte dva řádky délky 8, které tuto podmínku splňují. Barvy se shodují v 1, 2, 4 a 7 sloupci a liší ve 3, 5, 6 a 8.



Obr. 1: Porovnání barev řádků

Je zjevné, že nutnou podmínkou pro sestrojení Hadamardovy matice je, aby n bylo sudé, s jedinou výjimkou, že $n = 1$.

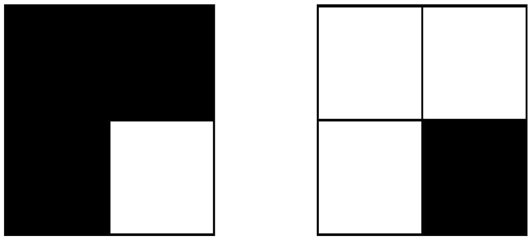
Úloha 2.1. *Sestrojte Hadamardovu matici* 2×2.

Řešení. Hadamardova matice musí mít v jednom (např. prvním) sloupci stejné barvy a ve druhém různé. Hadamardova matice 2×2 tedy vypadá (až na prohození řádků, sloupců či barev) takto:

Obr. 2: Hadamardova matice 2×2

□

Pro další úlohu si zavedeme negaci Hadamardovy matice. Nechť H je Hadamardova matice $n \times n$, negací Hadamardovy matice rozumíme tabulku $n \times n$ takovou, že jsou u všech polí prohozeny barvy, tedy všechna pole, která byla v matici H obarvena první barvou, jsou v negaci H (značíme $-H$) obarvena druhou barvou a naopak. Na obrázku 3 vidíme Hadamardovu matici a její negaci.

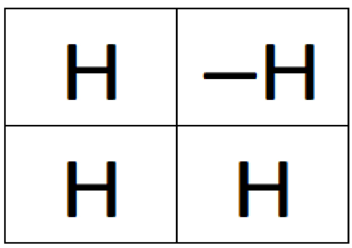


Obr. 3: Negace Hadamardovy matice 2×2

Úloha 2.2. *Nechť H je Hadamardova matice, dokažte, že i její negace $-H$ je Hadamardova matice.*

Řešení. Vezmĕmě si dva řádky $-H$. Pokud se shodovaly u dvou polí v matici H, shodují se i v matici $-H$, jen mají druhou z barev. Obdobně, pokud se barvy polí lišily v H, liší se i v $-H$. Zjišťuje, že počet polí, na kterých se barvy shodují je stejný v H i $-H$. Protože H je Hadamardova matice, shodovaly se barvy u poloviny polí řádku. To samé musí platit i pro $-H$, a proto je $-H$ Hadamardova matice. $\square$

Úloha 2.3. *Nechť H je Hadamardova matice $n \times n$, dokažte, že i tabulka K o rozměrech $2n \times 2n$ sestrojená dle obrázku 4, je Hadamardova matice.*



Obr. 4: Sylvesterova konstrukce

Řešení. Vezměme si dva různé řádky K.

Může nastat jeden ze tří následujících případů, které si následně rozebereme:

- Oba řádky patří do horní (resp. spodní) poloviny tabulky K.
- Jeden řádek je z horní poloviny a druhý ze spodní poloviny tabulky K a jedná se o stejné řádky tabulky H.
- Jeden řádek je z horní poloviny a druhý ze spodní poloviny tabulky K a jedná se o různé řádky tabulky H.

Pokud oba řádky jsou ze stejné poloviny tabulky K, tak se na prvních n pozicích liší přesně v polovině polí (protože H je Hadamardova matice) a na druhých n pozicích se liší také přesně v polovině polí (protože H (resp. $-H$) je Hadamardova matice).

Pokud je jeden řádek z horní poloviny a druhý ze spodní poloviny tabulky K a jedná se o stejné řádky tabulky H, tak se na prvních n pozicích u všech polí barvy shodují a na druhých n pozicích se barvy u všech polí liší, protože se jedná o řádek a jeho negaci.

Zbývá nám poslední případ, kdy je jeden řádek z horní poloviny a druhý ze spodní poloviny tabulky K a jedná se o různé řádky tabulky H. Protože se jedná o různé řádky tabulky H, tak se tyto řádky na prvních n pozicích liší přesně v polovině polí. Oba řádky se ale liší přesně v polovině polí u na druhých n pozicích, ale jedná se přesně doplňková pole. Tam kde se řádky v první n-tici lišily, ve druhé se shodují a vice versa.

Zjišťujeme, že tabulka K je Hadamardovou maticí. □

Hadamardovy matice jsou využívány pro konstrukci ortogonálních kódů, které slouží k paralelnímu přenosu informace k více příjemcům současně. Více o tomto tématu naleznete v níže doporučené literatuře.

Literatura

[Ja] A. Jančařík: *Algebra v informatice.* Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, Praha, 2016. ISBN: 978-80-88176-07-7.

`https://publi.cz/eknihy/?book=437-algebra-v-informatice`

(SNAD) JEDNODUCHÁ GEOMETRIE

Jan Krejčí

Cílem tohoto příspěvku je čtenáře seznámit s technikami, které mu napomohou při řešení letošní úlohy 70-C-I-3.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme po řadě I a U střed kružnice mu vepsané a dotykový bod této kružnice s odvěsnou BC. Určete, jaký je poměr $|AC| : |BC|$, jsou-li úhly CAU a CBI shodné.

Na začátku nastíníme (nebo pro některé zopakujeme) metody, kterými lze ukázat, že dva trojúhelníky jsou shodné. Ač se to může jevit jako nezajímavá technika, člověk si může usnadnit celou řadu úloh tím, že najde vhodné shodné (nebo podobné) trojúhelníky. Další část příspěvku strávíme s úlohami, ve kterých se vyskytují vepsané kružnice[3] a na konci lze pak nalézt několik úloh na procvičení.

1 Shodnost

Nejprve si pojďme říci, co to vlastně znamená, že dva trojúhelníky jsou shodné. Řekneme, že dva trojúhelníky jsou *shodné*, pokud z jednoho umíme udělat druhý za pomoci otočení, posunutí nebo překlopení. Pro potřeby řešení úloh můžeme použít následující větu.

Věta 1.1. *Dva trojúhelníky jsou shodné, pokud platí jedna z následujících podmínek:*

- *trojúhelníky se shodují v délkách odpovídajících si stran, (věta sss)*
- *trojúhelníky se shodují v délce dvou stran a úhlu, který tyto dvě strany svírají, (věta sus)*
- *trojúhelníky se shodují v délce dvou stran a v úhlu proti větší z nich, (věta Ssu)*
- *trojúhelníky se shodují v délce jedné strany a v obou (vnitřních) úhlech k ní přilehlých. (věta usu)*

Pozor na to, že nestačí, aby se dva trojúhelníky shodovaly v délce dvou stran a jednom úhlu – je třeba, aby tento úhel byl ve „vhodné poloze“ vzhledem k těmto stranám.

[3] Jak kdysi řekl klasik, kam čert nemůže, tam nastrčí vepsanou kružnici.

Úloha 1.2. *(MKS 33-2-1) Alča jednou ve svém sešitě našla narýsované dva trojúhelníky, které se shodovaly ve velikostech všech vnitřních úhlů a v délkách dvou stran, ale přesto nebyly shodné. Nalezněte dva takové trojúhelníky.*

Pro potřeby našeho příkladu dodejme, že dva trojúhelníky nazveme *podobné*,[4] pokud velikosti odpovídajících si vnitřních úhlů jsou stejné, nebo ekvivalentně, pokud poměry odpovídajících si stran jsou stejné.

Řešení. Uvažujme dva trojúhelníky, z nichž jeden má délky stran 16, 24, 36 a druhý 24, 36 a 48.

Prvně, v obou případech se jedná o trojúhelníky, protože splňují trojúhelníkové nerovnosti pro libovolnou volbu stran. Druhak, tyto trojúhelníky jsou podobné, protože poměry stran v pořadí, v jakém byly zadány, jsou rovny třem polovinám. Z toho plyne, že odpovídající si vnitřní úhly se rovnají. Nicméně, jak vidno, trojúhelníky nejsou shodné. □

2 Vepsaná kružnice

Druhým objektem, který se v zadání úlohy vyskytuje, je vepsaná kružnice, sesterská kružnice ke kružnici opsané. Každá z nich má své zajímavé vlastnosti a my si zde před řešením dalších příkladů jednu ukážeme. Druhou pak lze najít v první úloze v sekci Na procvičení.

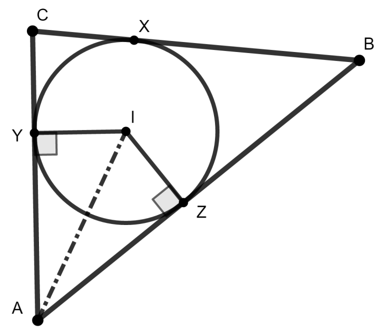
Jedna z důležitých vlastností kružnice vepsané je, že body dotyku této kružnice se stranami trojúhelníku nám vytínají na různých stranách úseky stejné délky.

Úloha 2.1. *(GT) Mějme trojúhelník ABC. Označme X, Y a Z body dotyku kružnice vepsané se stranami a, b a c. Pak platí*

$$|BX| = \frac{a+c-b}{2}.$$

Řešení. Jak již z obrázku může být patrné, dvojice úseček AY a AZ stejně jako BX a BZ a nakonec CX a CY jsou stejně dlouhé. Důvod je ve všech třech případech stejný, pojďme si ho ukázat na dvojici AY a AZ.

[4] Podobnost je vlastnost velmi užitečná, ale v tomto příspěvku s ní nebudeme pracovat.



Označme I střed kružnice vepsané a uvažujme osu vnitřního úhlu při vrcholu A. Ta definuje trojúhelníky AZI a AIY. Tyto trojúhelníky jsou jednak pravoúhlé, protože body Y a Z jsou body dotyku kružnice vepsané s trojúhelníkem ABC, a jednak mají úhly při vrcholu I shodné, protože totéž platí pro úhly při vrcholu A (ty jsou rovny polovině úhlu $\sphericalangle BAC$). Tedy tyto dva trojúhelníky jsou shodné podle věty *usu*, neboť navíc sdílejí stranu AI. Z toho pak plyne, že strany AY a AZ mají stejnou délku.

Dále označme délky úseček $|AY| = |AZ| = x$, $|BX| = |BZ| = y$, $|CX| = |CY| = z$. Pak

$$\frac{a+c-b}{2} = \frac{y+z+x+y-z-x}{2} = y = |BX|.$$

□

Všimněme si, že v předchozí úloze jsme použili shodnost trojúhelníků na to, abychom dokázali, že dvě úsečky jsou stejně dlouhé. Následující úloha je zákeřnější v tom, že v jejím zadání není ani zmínka o nějaké vepsané kružnici. V takovém případě ji tam musíme sami najít.

Úloha 2.2. *(MKS 34-2-4) Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Pro každý vnitřní bod X úsečky AD sestrojme bod Y tak, aby platilo*

$$|\sphericalangle YBC| = 2|\sphericalangle XBC|, \quad |\sphericalangle YCB| = 2|\sphericalangle XCB|$$

a body X, Y ležely ve stejné polorovině určené přímkou BC. Dokažte, že hodnota $|YC| - |YB|$ nezávisí na volbě bodu X.

Řešení. Vzhledem k podmínkám úlohy jsou přímky BX a CX osy vnitřních úhlů při vrcholech B, C trojúhelníku BCY. Průsečík BX

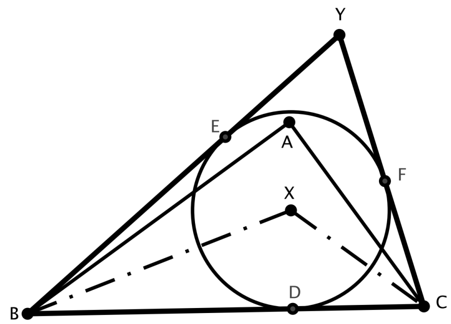
a CX je tudíž střed kružnice vepsané trojúhelníku BCY. Označme si po řadě E a F body dotyku kružnice vepsané se stranami BY a CY. Vedeme-li z bodu dvě tečny ke kružnici, pak vzdálenost tohoto bodu od obou bodů dotyku je stejná. Proto

$$|EY| = |FY|, \quad |BE| = |BD| \quad \text{a} \quad |CF| = |CD|.$$

Rozdíl tedy můžeme zapsat ve tvaru:

$$|CY| - |BY| = |CF| + |FY| - |BE| - |EY| = |CD| - |BD|.$$

Poloha bodu D nezávisí na volbě bodu X, proto ani rozdíl $|CD| - |BD|$ na ní nezávisí.

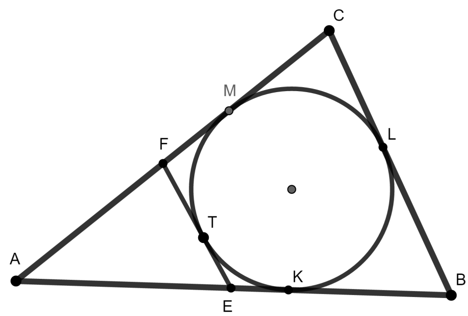


□

Úloha 2.3. *(MKS 32-6-3) Mějme trojúhelník ABC. Nakreslíme tři tečny k jeho vepsané kružnici tak, že každá odřízne jiný z vrcholů trojúhelníka. Obvody odříznutých trojúhelníků jsou 1, 2 a 3. Dokažte, že původní trojúhelník byl pravoúhlý.*

Řešení. Označme si K, L, M body dotyku stran trojúhelníka s kružnicí vepsanou (viz obrázek). Dále si označme T bod dotyku tečny, která „odřízla“ bod A, s kružnicí vepsanou. Průsečíky téže tečny se stranami AB a AC označme E a F.

Body K a T jsou body dotyku tečen vedených ke kružnici z téhož bodu, a tudíž platí $|EK| = |ET|$. Obdobně $|FT| = |FM|$ (tečny z bodu F) a $|AK| = |AM|$ (tečny z bodu A). Díky tomu můžeme psát:



$$
\begin{aligned}
O(\triangle AEF) &= |AE| + |EF| + |AF| \\
&= |AE| + |ET| + |FT| + |AF| \\
&= |AE| + |EK| + |FM| + |AF| \\
&= |AK| + |AM|,
\end{aligned}
$$

kde $O(\triangle AEF)$ je obvod trojúhelníku AEF. Jelikož $|AK| = |AM|$, platí

$$|AK| = |AM| = \frac{1}{2} O(\triangle AEF).$$

Stejným způsobem odvodíme, že

$$|BK| = |BL| = \frac{1}{2} O(\triangle BKL), \quad |CL| = |CM| = \frac{1}{2} O(\triangle CML).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že obvody trojúhelníků u vrcholů A, B, C jsou po řadě 1, 2 a 3. Potom je

$$|AB| = |AK| + |KB| = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2},$$

$$|BC| = |BL| + |LC| = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

a nakonec

$$|AC| = |AM| + |MC| = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$

Nyní již snadno ověříme, že délky stran trojúhelníka ABC vyhovují Pýthagorově větě, trojúhelník ABC je tedy pravoúhlý. $\square$

V příkladech výše jsme ukázali několik základních technik, které se v úlohách můžou vyskytnout. V další sekci si pak čtenář může tyto techniky na dalších příkladech vyzkoušet.

3 Na procvičení

Úloha 3.1. *(GT) Mějme trojúhelník ABC. Označme ρ poloměr kružnice do něj vepsané, S obsah tohoto trojúhelníku a s nechť značí polovinu jeho obvodu. Ukažte, že pak*

$$S = \rho s.$$

Úloha 3.2. *(MKS 27-3-3) Je dán rovnoramenný trojúhelník DEF se základnou EF, $|EF| < |DE|$. Na polopřímce $\overrightarrow{FE}$ leží bod K, pro který $|DF| = |FK|$, podobně na polopřímce $\overrightarrow{EF}$ leží bod L, pro nějž je $|DE| = |EL|$. Ukažte, že platí $|KD|^2 = |DF| \cdot |KL|$.*

Úloha 3.3. *(GT) Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.*

Úloha 3.4. *(MKS 32-6-4) V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A. Na stranách AB a AC najdeme po řadě body E a F takové, že*

$$|BE| = |BD| \quad a \quad |CF| = |CD|.$$

Kolmice na stranu AB vedená bodem B a kolmice na stranu AC vedená bodem C se protnou v bodě S. Dokažte, že

$$|SE| = |SF|.$$

4 Literatura

[MKS] Matematický korespondenční seminář MFF UK, úlohy z různých ročníků uváděné ve tvaru ročník-série-číslo úlohy
`mks.mff.cuni.cz`

[GT] M. Töpfer: *Geometrie trojúhelníka*, sborníkový příspěvek, knihovnička MKS.

ALGEBRAICKÉ VÝRAZY A JEJICH HODNOTY

Jakub Löwit

Určování číselných hodnot, kterých může nabývat daný výraz, je základní matematickou dovedností. S podobnými otázkami se setkáváme od základní školy, tam ale jejich význam dozajista nekončí. Určování možných hodnot různých funkcí je totiž důležité jak pro řešení různých praktických problémů, tak pro řešení otázek čistě teoretických.

Během minulých století už samozřejmě byly vyvinuty metody, jak se s takovými problémy popasovat – mnoho z nich spadá do oboru *matematické analýzy*. Zabývat se takovou teorií ale teď nebude naším cílem. Mnoho pěkných úloh jde totiž vyřešit i bez ní, a často dokonce rychleji a elegantněji. Takové úlohy se pak nezřídka objevují v matematických soutěžích všech úrovní. A ačkoli to tak na první pohled nemusí vypadat, úlohy tohoto typy mohou být i poměrně pestré.

Podívejme se nyní na zadání úlohy 70-C-I-4 kategorie C letošního ročníku matematické olympiády.

Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{a+bc}{a+b}+\frac{b+ca}{b+c}+\frac{c+ab}{c+a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1.

Vskutku, naším úkolem je najít hodnoty jistého – algebraického, pravidelně vyhlížejícího a velmi pěkného – výrazu. Hodnoty dosazovaných proměnných jsou přitom omezené dalšími podmínkami. Pojďme si tedy ukázat, jak k takové úloze vůbec přistoupit.

1 Přímé dosazování

Umíme-li z podmínek některou proměnnou vyjádřit pomocí zbylých, můžeme za ni do výrazu zkrátka a dobře dosadit. Tím se podmínky rovnou zbavíme a úloha se s trochou štěstí zjednoduší. Předveďme si to na na příkladu.

Úloha 1.1. *Reálná čísla x, y, z splňují $xyz=1$. Určete všechny možné hodnoty výrazu*

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}.$$

Řešení. Díky dané podmínce jsou zřejmě všechna tři čísla nenulová. Bez problému tedy do výrazu můžeme dosadit $z = \frac{1}{xy}$. Po drobné úpravě tak dostáváme

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+\frac{1}{x}} + \frac{1}{1+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}}.$$

Rozšíříme-li nyní druhé dva zlomky neunulovými čísly x resp. xy, dostáváme

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{xy}{1+x+xy} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1.$$

Pro čísla x, y, z splňující $xyz = 1$ má proto výraz vždy hodnotu 1. □

2 Chytré úpravy

Přímé dosazování však často nestačí. Problémů je hned několik. Předně se může stát, že žádnou proměnnou z podmínek zkrátka vyjádřit nejde. I v případě, že se nám to povede, ale ještě nemusíme mít vyhráno – s novým výrazem je třeba dál pracovat. A dosazení může porušit jeho přehlednost a pravidelnost.

Úloha 2.1. *Určete, jakých hodnot může nabývat výraz*

$$V = ab + bc + cd + da,$$

splňují-li reálná čísla a, b, c, d dvojici podmínek

$$\begin{aligned} 2a - 5b + 2c - 5d &= 4, \\ 3a + 4b + 3c + 4d &= 6. \end{aligned}$$

[63. MO, C-I-1]

Řešení. Samozřejmě můžeme začít přímočaře vyjadřovat proměnné z podmínek a dosazovat do původního výrazu. Pokud neuděláme chybu, tato metoda povede k cíli. Pojďme si ale místo toho raději ukázat kratší řešení. Pro začátek chytře upravme

$$V = ab + bc + cd + da = b(a+c) + d(a+c) = (a+c)(b+d).$$

K vyřešení úlohy proto stačí hledat možné dvojice hodnot $x = (a+c)$, $y = (b+d)$. Sečtením resp. odečtením daných podmínek dostaneme novou dvojici rovnic

$$\begin{aligned} 5(a+c) - (b+d) &= 10, \\ (a+c) + 9(b+d) &= 2. \end{aligned}$$

Stačí tedy vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} 5x - y &= 10, \\ x + 9y &= 2. \end{aligned}$$

Ta má jednoznačné řešení $(x, y) = (2, 0)$. Zpětným dosazením do upraveného výrazu V proto dostáváme $V = (a + c)(b + d) = 2 \cdot 0 = 0$. To je jeho jediná možná hodnota za daných podmínek. □

Jak jsme již poznamenali, předchozí úlohu je stále možné přímočaře vyřešit dosazením. U jiných úloh ale nezbývá, než trochu experimentovat – výraz poupravit, zjednodušit, zachovat jeho pravidelnost, občas si vypomoci podmínkami. Samozřejmě může chvíli trvat, než na takové řešení přijdeme. Mnohdy je pak ale velmi krátké a pěkné. Předveďme si to na další úloze.

Úloha 2.2. *Ukažte, že pokud pro nenulová reálná čísla a, b, c platí rovnost*

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = 0,$$

tak se některá dvě z těchto tří čísel rovnají.

Řešení. Po prvním pohledu do zadání vůbec není jasné, co dělat. Zadaná rovnost je sice pěkně pravidelná, intuitivně ale trochu nepřístupná. Zkusme ji proto upravit do přehlednějšího tvaru vynásobením nenulovým číslem abc:

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = 0.$$

Nyní přichází hlavní trik: chceme-li ukázat, že se některé dvě z čísel a, b, c rovnají, stačí ukázat nulovost součinu $(a-b)(b-c)(c-a)$. Ten se ale skutečně nuluje, neboť roznásobením získáme

$$(a-b)(b-c)(c-a) = abc - abc + b^2a - a^2b + c^2b - b^2c + a^2c - c^2a$$

$$= -[ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)] = 0,$$

kde poslední rovnost vyplývá z předchozí úpravy zadaného výrazu. Tedy $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, takže některá dvě z čísel a, b, c se skutečně musí rovnat. □

3 Odhady a nerovnosti

Řešení bohužel nemusí vždy vyjít jediné – obory hodnot mohou být tvořeny různými intervaly atd. Určování všech možných hodnot – nebo alespoň maxim a minim – takových výrazů je ale stále smysluplným úkolem. Nejjednodušším způsobem, jak omezit hodnoty nějakého výrazu je následující fakt:

Součet druhých mocnin několika reálných čísel je vždy nezáporný.

Ačkoli to může znít banálně, použití této skutečnosti vyřeší nejednu úlohu. Předveďme si pro začátek jedno šikovné tvrzení.

Tvrzení 3.1. *Pro libovolná reálná čísla x, y platí odhad $x^2 + y^2 \geq 2xy$.*

Důkaz. Vskutku, dokazovanou nerovnost lze ekvivalentně upravit na

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,$$

přičemž levá strana je rovna výrazu $(x - y)^2$, který skutečně nabývá pouze nezáporných hodnot. □

Zkusme si tedy vyřešit nějakou olympiádní úlohu, tentokrát z krajského kola kategorie B.

Úloha 3.2. *Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu*

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

[68. MO, B-II-1]

Řešení. Snadnou úpravou a následným využitím podmínky $(a + b) = 2$ dostáváme

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{(a + b)^2 - 2ab}{ab + 1} = \frac{4 - 2ab}{1 + ab}.$$

Všimněme si, že výraz na pravé straně klesá s rostoucí hodnotou nezáporného čísla ab. K určení jeho maxima a minima proto stačí určit a dosadit minimum a maximum hodnoty ab za daných podmínek $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b = 2$.

Protože čísla a, b jsou nezáporná, jistě platí $ab \geq 0$. Pro vyhovující dvojice $(a, b) = (0, 2)$ a $(a, b) = (2, 0)$ přitom skutečně $ab = 0$. Tedy 0 je nejmenší možnou hodnotou ab, takže největší možná hodnota výrazu V je rovna

$$\frac{4-2\cdot 0}{1+0}=4.$$

Zkusme nyní určit největší možnou hodnotu výrazu ab za daných podmínek. Použitím výše dokázaného tvrzení pro čísla $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$ dostáváme

$$2=a+b=x^2+y^2\geq 2xy=2\sqrt{ab}.$$

Umocněním na druhou a snadnou úpravou proto získáváme odhad $1\geq ab$. Pro vyhovující dvojici čísel $(a,b)=(1,1)$ přitom opravdu $ab=1$. Tedy největší možná hodnota ab je rovna 1. Nejmenší možná hodnota výrazu V je proto rovna

$$\frac{4-2\cdot 1}{1+1}=1.$$

Tím jsme hotovi, výraz V má za daných podmínek největší hodnotu 4 a nejmenší hodnotu 1. $\square$

Poznamenejme, že při použití předchozího tvrzení v řešení úlohy jsme vyvodili, že pro libovolná nezáporná čísla a, b platí

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}.$$

Zde je ale opravdu třeba, aby čísla a, b byla nezáporná – například pro $a=-1=b$ nerovnost zřejmě neplatí. Tato ekvivalentní forma našeho tvrzení je při zdolávání různých nerovností také velmi užitečná.

Literatura

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

[PraSe] *Pražský korespondenční seminář.* `https://prase.cz`

PODOBNÉ TROJÚHELNÍKY A POMĚRY DÉLEK

Šárka Gergelitsová

Při řešení mnohých geometrických úloh, úlohy Matematické olympiády nevyjímaje, využijeme podobnost trojúhelníků, rovnoběžnost a známé poměry délek úseček.

Patří k nim i úloha 70-C-I-5, jejíž zadání zní:

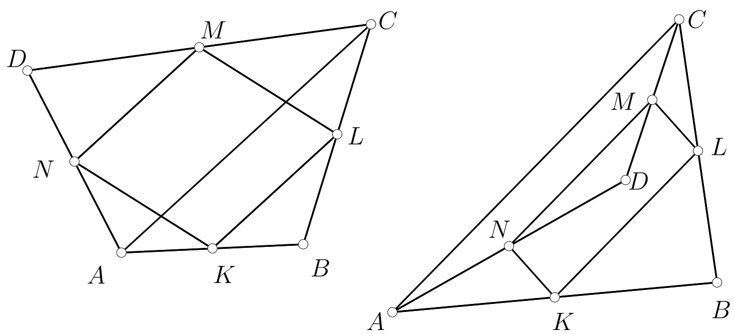
Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části.

1 Střední příčky trojúhelníku

Připomeňme si následující tvrzení.

Tvrzení 1.1. *Středy stran libovolného čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku.*

Důkaz. Označme vrcholy daného čtyřúhelníku A, B, C, D a středy jeho stran AB, BC, CD, DA po řadě K, L, M, N. Potom je KL střední příčka trojúhelníku ABC rovnoběžná se stranou AC. Trojúhelníky ABC, KBL jsou podobné, $|AB| = 2\,|KB|$, $|AC| = 2\,|KL|$. Podobně je MN střední příčka trojúhelníku CDA rovnoběžná se stranou AC. Délky úseček KL, MN jsou proto shodné, rovné polovině délky úsečky AC. Tudíž také $KN \parallel BD \parallel LM$. Všimněme si, že daný čtyřúhelník nemusí být konvexní.



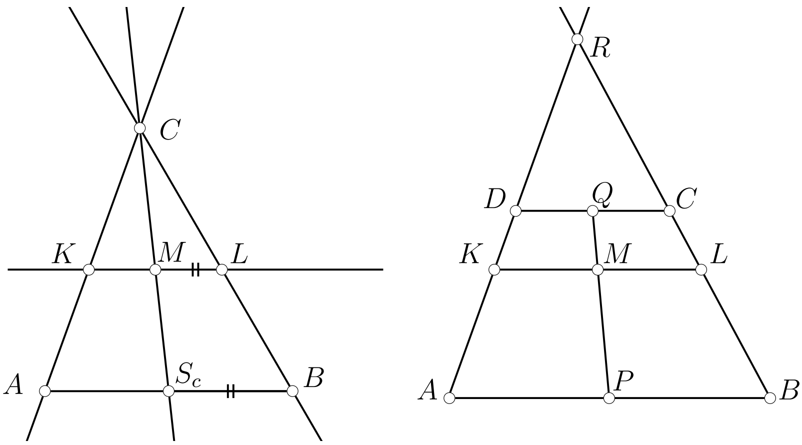
Obr. 1: Konvexní a nekonvexní čtyřúhelník

K dokončení důkazu, že $KLMN$ je rovnoběžník, ještě musíme ověřit, že body K, L, M, N neleží v jedné přímce. Protože $ABCDA$ je lomená čára, jejíž úsečky se neprotínají, nemůže být $AC \parallel BD$ (a tedy ani $KL \parallel KN$). Zdůvodníme to sporem: Pokud by bylo $AC \parallel BD$, pak by se protínaly buď úsečky AD a CB, nebo úsečky AB a CD. □

Tvrzení 1.2. *Je dán trojúhelník ABC a body K, L po řadě na přímkách AC, BC různé od bodů A, B, C takové, že $KL \parallel AB$. Označme S_c střed AB. Potom přímka CS_c půlí úsečku KL. (Ledabyle řečeno: Těžnice trojúhelníku půlí všechny příčky rovnoběžné s příslušnou základnou.)*

Důkaz. Toto tvrzení je snadným zobecněním tvrzení o střední příčce. Označme M průsečík těžnice z vrcholu C s úsečkou KL (obr. 2 vlevo). Trojúhelníky AS_cC, KMC jsou podobné, $|AS_c| : |KM| = |S_cC| : |MC|$. Trojúhelníky S_cBC, MLC jsou podobné, $|S_cB| : |ML| = |S_cC| : |MC|$. Proto $|AS_c| : |KM| = |S_cB| : |ML|$.

Odtud $|AS_c| : |S_cB| = |KM| : |ML|$, a tedy $|KM| = |ML|$.



Obr. 2: Rovnoběžky se základnami

□

Tvrzení 1.3. *Je-li $ABCD$ rovnoběžník nebo lichoběžník se základnami AB, CD, bod P střed úsečky AB, bod Q střed úsečky CD, pak úsečka PQ půlí všechny příčky čtyřúhelníku $ABCD$ rovnoběžné s AB. (Ledabyle řečeno: Spojnice středů základen lichoběžníku půlí všechny rovnoběžky se základnami.)*

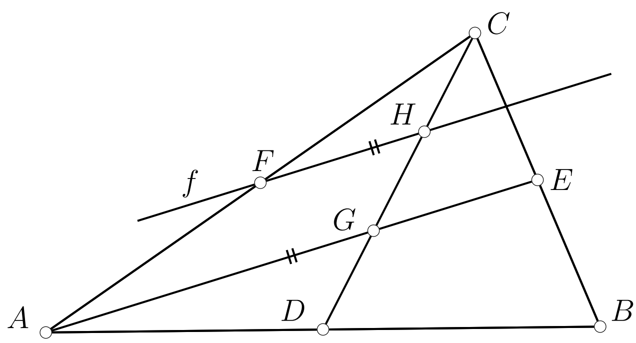
Důkaz. Toto tvrzení je přímým důsledkem předchozího tvrzení (viz obr. 2 vpravo).

Označme K, L krajní body a M střed příčky rovnoběžné se stranou AB

daného čtyřúhelníku. Je-li $ABCD$ rovnoběžník, jsou $APMK$, $PBLM$ shodné rovnoběžníky, a tedy $|KM| = |ML|$. Je-li $ABCD$ lichoběžník, sestrojíme průsečík R přímek BC, AD a použijeme předchozí tvrzení pro trojúhelník ABR s příčkami CD a KL. Těžnice trojúhelníku ABR prochází středem P strany AB, středem Q příčky CD, i středem M příčky KL. □

Úloha 1.4. *Je dán trojúhelník ABC, body D, E, F jsou po řadě středy stran AB, BC a AC. Dokažte, že přímka AE a přímka f s ní rovnoběžná vedená bodem F dělí úsečku DC na tři shodné části.*

Řešení. Označme průsečíky přímek AE, f s úsečkou DC po řadě G, H. Úsečky AE, DC jsou těžnice trojúhelníku, protínají se tedy v těžišti, ve své třetině. Přímka f je rovnoběžka se stranou AE trojúhelníku AEC a prochází středem strany AC. Proto jsou trojúhelníky FHC, AGC podobné a $|HC| : |GC| = |FC| : |AC| = 1 : 2$. Bod H je tedy středem úsečky GC. Body G, H dělí úsečku CD na třetiny.



Obr. 3: Třetiny těžnice

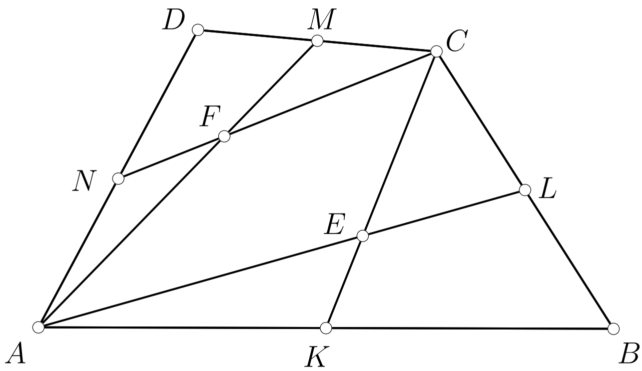
□

2 Další čtyřúhelníky a těžiště

V geometrických úlohách bývá nejobtížnější najít vhodný vztah mezi zadanými prvky či vhodný bod, úsečku, přímku, ..., o nichž se zadání nezmiňuje. Zadání následující úlohy ale nápovědu obsahuje.

Úloha 2.1. *Je dán čtyřúhelník $ABCD$ a body K, L, M, N jsou po řadě středy jeho stran AB, BC, CD, DA. Bod E je průsečík úseček AL, KC, bod F je průsečík úseček AM, NC. Vyjádřete délku úsečky EF pomocí délek úhlopříček čtyřúhelníku.*

Řešení. Body E, F leží na stranách trojúhelníku MAL, kde úsečka ML je střední příčka trojúhelníku DBC, proto je rovnoběžná s úhlopříčkou BD a má poloviční délku. (Stejně tak platí, že E, F leží na stranách trojúhelníku NCK, kde $KN \parallel BD$, $|BD| = 2|KN|$.)



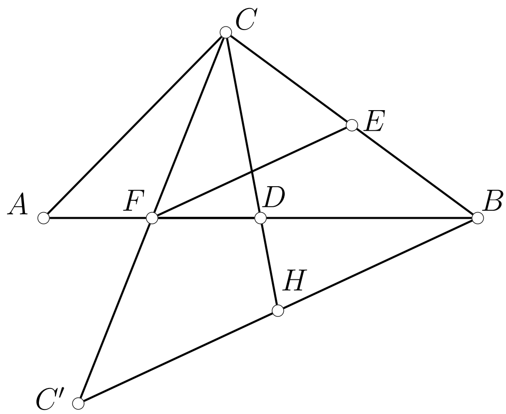
Obr. 4: Těžnice

Použili jsme dané podmínky a nastává čas chvíli hledět na obrázek. Nebo doplnit vhodnou úsečku... Zadání nás upozorňuje na úhlopříčky, to je ona nápověda, bez níž bychom řešení asi hledali déle. Úhlopříčka AC je společnou stranou trojúhelníků ABC a ACD. Přitom úsečky AL, CK jsou těžnice trojúhelníku ABC a úsečky AM, CN jsou těžnice trojúhelníku ACD. Proto je E těžiště trojúhelníku ABC a leží ve třetině těžnice EL, stejně jako bod F – těžiště trojúhelníku ACD – leží ve třetině těžnice AM. Proto $EF \parallel ML \parallel BD$ a $|EF| = 2/3\,|ML|$. Proto $|EF| = 1/3\,|BD|$. Na délce úhlopříčky CD nezáleží. □

Ukažme si ještě velmi stručná (přitom úplná) řešení dvou úloh z matematických soutěží. Tyto úlohy jsou uvedeny i mezi návodnými úlohami pro letošní první kolo Matematické olympiády v oficiálních komentářích.

Výhodou úlohy 68-C-S-2 je, že můžeme najít několik způsobů jejího řešení. Po předchozí úloze ji už nejspíš vyřešíte snadno. Ukážeme si ten postup, který využívá těžiště trojúhelníku. Uvedené řešení (a ještě tři další) najdete na webu [MO].

Úloha 2.2. *Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF.*



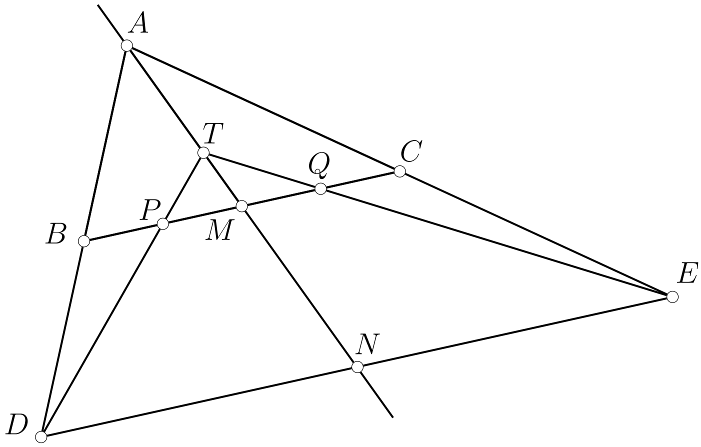
Obr. 5: Těžnice a příčka

Řešení. Bod D leží ve třetině úsečky BF. Sestrojme vhodný trojúhelník, pro který je bod D těžištěm; je to trojúhelník BCC', kde F je střed úsečky CC'. Přímka CD, která prochází těžištěm trojúhelníku, je jeho těžnice. Půlí tedy nejen stranu BC', ale podle Tvrzení 1.2 všechny příčky s ní rovnoběžné, tedy i úsečku EF, která je střední příčkou. □

Úloha 2.3. *Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Označme M střed jeho strany BC. Na polopřímce opačné k BA leží takový bod D, že $|AB| = |BD|$, a podobně na polopřímce opačné k CA leží bod E tak, že $|AC| = |CE|$. Úsečky TD, TE protínají stranu BC po řadě v bodech P, Q. Dokažte, že body P, M, Q dělí úsečku BC na čtyři stejně dlouhé části.* *(8. CPS MO juniorů (2019))*

Řešení. Pravděpodobně si rychle všimneme dvou dvojic podobných trojúhelníků, pomocí nichž požadované tvrzení odvodíme. Je potřeba jen všechna dílčí tvrzení řádně zdůvodnit. (Tvrzení 1.2 už znovu dokazovat nebudeme.)

Body B, C jsou středy stran trojúhelníku ADE, úsečka BC je proto střední příčkou trojúhelníku ADE, je rovnoběžná s DE a má poloviční délku. Střed M úsečky BC leží na těžnici trojúhelníku ADE, bod N, v němž přímka AM protíná úsečku DE, je její střed a $|AN| = 2\,|AM|$. Těžiště T leží ve třetině úsečky AM. Proto $|TN| = 4\,|TM|$.
Protože je $PQ \parallel DE$, jsou podobné také trojúhelníky TDE, TPQ, $|PQ| : |DE| = |TM| : |TN|$. Proto $|PQ| = 1/4\,|DE| = 1/2\,|BC|$. Těžnice TN trojúhelníku TDE půlí i příčku PQ. Proto $|PM| = |MQ|$. Protože $|PM| = 1/2\,|PQ|$, je $|PM| = 1/4\,|BC|$. Body P, M, Q tudíž dělí úsečku BC na čtyři stejně dlouhé části. □



Obr. 6: Dělení úsečky na čtvrtiny

Literatura

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

POČTY A SOUČTY ČÍSEL

Zdeněk Halas

Hledání čísel vyhovujících daným podmínkám je v matematice zcela běžné. Méně obvykle však působí úlohy, v nichž máme určit nejmenší či největší počet čísel, která daným podmínkám vyhovují. Taková je i úloha 70-C-I-6, jejíž zadání zní:

Na tabuli je napsáno několik přirozených čísel od 1 *do* 100*, přičemž žádné z nich není dělitelné dvoumístným prvočíslem a součin žádných dvou z nich není druhou mocninou přirozeného čísla.*

a) *Určete největší možný počet čísel na tabuli.*

b) *Určete největší možný součet čísel na tabuli.*

1 Rozklady a dělitelnost

Než se pustíme do řešení úloh, připomeňme si několik jednoduchých poznatků o přirozených číslech. Množinu všech přirozených čísel $\{1, 2, 3, \dots\}$ budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech prvočísel označíme $\mathbb{P}$.

Věta 1.1. *Každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ lze „napsat“ (až na pořadí činitelů jediným způsobem) jako součin prvočísel, tj. ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje konečně mnoho prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ a konečně mnoho exponentů $e_1, e_2, \dots, e_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ takových, že:*

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}\,.$$

Pozorování 1.2. Jak vypadá rozklad druhé mocniny přirozeného čísla na součin prvočísel?

$$n^2 = \left(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}\right)^2 = p_1^{2e_1} \cdot p_2^{2e_2} \dots p_k^{2e_k}\,.$$

Všimněme si, že *všechny exponenty jsou sudé.* Ihned také vidíme, jak by vypadala j-tá mocnina n:

$$n^2 = \left(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}\right)^j = p_1^{je_1} \cdot p_2^{je_2} \dots p_k^{je_k}\,.$$

2 Zmenšovátor

Některé úlohy mohou vypadat velmi náročně, neboť se v nich pracuje s velikými čísly. Ostatně už jen ověřit, že je nalezené řešení správné, nemusí být nic snadného. Zde může pomoci jednoduchý trik: použijeme *zmenšovátor*. Místo vyšetřování množiny čísel čítající tisíce prvků si zkrátka vezmeme množinu, jejíž prvky si snadno vypíšeme na papír. Se zmenšovátorem se ovšem musí opatrně; nemůžeme jej prostě nastavit na maximum, neboť by se z původní úlohy vytratila její podstata a na malilinkaté úložce bychom už nemohli pozorovat zhola nic.

Následující úloha prošla zmenšovátorem, její řešení bude skutečně snadné.

Úloha 2.1. *Uvažujme množinu* $\mathbb{N}(9) = \{1, 2, \ldots, 9\}$. *Určete největší možný počet čísel, která z této množiny můžeme vybrat, aby žádný ze součinů dvou z nich nebyl:*

a) sudý,

b) dělitelný čtyřmi,

c) dělitelný třemi.

U každého případu navíc určete, jakého největšího možného součtu vybraných čísel lze dosáhnout.

Řešení. Rozebereme postupně jednotlivé případy.

a) Nemá-li být součin žádných dvou čísel z hledané podmnožiny množiny $\mathbb{N}(9)$ sudý, musíme si uvědomit, že součin sudého čísla s jakýmkoli přirozeným číslem sudý je. Součiny však mohou být dle zadání liché, čehož lze dosáhnout pouze v případě, že oba činitele budou liché. Takže z množiny $\mathbb{N}(9)$ můžeme vybrat všechna lichá čísla: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Z $\mathbb{N}(9)$ tedy můžeme vybrat nejvýše 5 čísel a největší možný součet je 25.[5]

b) Řešení je obdobné případu a), ovšem s tím rozdílem, že součin může být sudý, jen nesmí být dělitelný 4. Diskvalifikovány jsou tedy násobky 4. A co ostatní sudá čísla? Pokud by se v našem výběru objevila dvě sudá čísla, byl by jejich součin dělitelný 4.

[5] Všimněme si, že při postupném přičítání lichých čísel dostáváme vždy druhé mocniny: $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, … Tento fakt se dá pěkně znázornit graficky: např. u „čtverce“ z 2×2 kamínků obložíme dvě jeho strany $2 + 2$ kamínky a 1 „do rohu“, přidáme tedy 5 kamínků. Dostaneme čtverec 3×3 a můžeme v „obkládání“ pokračovat dále a získávat větší a větší čtverce.

V našem výběru z $\mathbb{N}(9)$ se tedy mohou objevit pouze lichá čísla a jedno číslo sudé, nejvýše jich tedy je 6. Největší možný součet je $25 + 8 = 33$, neboť 8 je největším sudým číslem z $\mathbb{N}(9)$.

c) Zde můžeme bezostyšně okopírovat řešení (nikoli však výsledek) případu a): musíme vyloučit všechny násobky tří, zbylá čísla jsou přípustná. Vybrat tedy můžeme nejvýše 6 čísel: $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, jejich součet je 27. □

3 Kdo chce moc, nemá nic

Nyní jsme již připraveni na řešení následující úlohy, která je obdobou úlohy [68-C–II–2].

Úloha 3.1. *Jaký je nejmenší možný součet $a+b+c$ tří přirozených čísel a, b, $c \in \mathbb{N}$ takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají největší společné dělitele $2, 3, 5$? Uveďte tuto vyhovující trojici a ukažte, že je jediná.*

Řešení. Řešení je jednoduché: jelikož jsou společné dělitele $2, 3, 5$, stačí vzít a, b i c ve tvaru

$$2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3}\,.$$

Má-li být jeden ze společných dělitelů 2, musí být 2 obsažena v rozkladech aspoň dvou čísel, např. a, b. Usilujeme o minimální součet $a+b+c$, proto nebudeme do rozkladů přidávat nic, co není nutné. Zatím tedy máme:

$$a = 2{\cdot}???, \qquad b = 2{\cdot}???, \qquad c =???.$$

Také 5 je největším společným dělitelem dvou čísel; abychom a, b, c zvětšili co nejméně, přidáme relativně velké číslo 5 k co nejmenším činitelům:

$$a = 2 \cdot 5, \qquad b = 2{\cdot}???, \qquad c =??? \cdot 5.$$

V rozkladu b už 5 být nemůže, neboť by největší společný dělitel a, b byl 10. Nyní stačí do dvou rozkladů přidat číslo 3 (opět se budeme snažit čísla zvětšovat co nejméně, tj. násobit trojkou co nejmenší činitele):

$$a = 2 \cdot 5, \qquad b = 2 \cdot 3, \qquad c = 3 \cdot 5.$$

Díky „opatrnému“ postupu jsme získali nejmenší čísla a, b, c vyhovující požadavku kladenému na dělitelnost, čímž jsme získali nejmenší součet $a + b + c = 10 + 6 + 15 = 31$.

Samozřejmě i jiná čísla vyhovují podmínce kladené na největší společné dělitele, např.

$$a = 2 \cdot 5, \qquad b = 2^2 \cdot 3, \qquad c = 3 \cdot 5,$$

$$a = 2 \cdot 5, \qquad b = 2 \cdot 3^2, \qquad c = 3 \cdot 5$$

či

$$a = 2 \cdot 5 \cdot 7, \qquad b = 2 \cdot 3, \qquad c = 3 \cdot 5,$$

je však zřejmé, že do rozkladů původní trojice už jen přidáváme další činitele, čímž součet $a + b + c$ zvětšujeme. □

Podobně vypadá i následující úloha, její řešení však obsahuje novou myšlenku.

Úloha 3.2. *Jaký je nejmenší možný součin $a \cdot b \cdot c$ tří navzájem různých přirozených čísel a, b, $c \in \mathbb{N}$ takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají vždy sudý součet?*

Řešení. Jelikož se jedná o malá čísla, lze řešení snadno uhádnout. Proveďme však obecnější pozorování, která nám mohou pomoci při řešení náročnějších úloh podobného typu. Základem je všimnout si, co znamená podmínka sudosti součtů dvou čísel: buď jsou obě sudá, nebo obě lichá. *Jsou tedy ze stejné „skupiny“ čísel, také říkáme, že mají stejnou paritu.* Jelikož chceme minimální součin $a \cdot b \cdot c$, musí být i jednotlivé činitele (jsou to přirozená čísla) co nejmenší. Vezmeme tedy nejmenší přirozené číslo $a = 1$; b pak musí být ze stejné „skupiny“ jako a, tedy opět liché, nejmenší (různé od a) je $b = 3$, podobně najdeme $c = 5$. Jejich součin je roven: $1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$.

Kdybychom zvolili jako výchozí nejmenší přirozené číslo z druhé „skupiny“, tj. sudé ($a = 2$), dostali bychom za této podmínky nejmenší součin $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, což je však ostře větší než 15, takže řešením je skutečně součin $1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$. □

Poznámka 3.3. Kdyby podmínka v zadání žádala, aby měly dvojice vždy lichý součet, znamenalo by to, že musí být jedno číslo sudé a jedno liché. Kdyby např. a bylo sudé, b by muselo být liché. Jenže c by pak muselo být liché (kvůli a) i sudé (kvůli b) zároveň, což není možné. Úloha by tedy neměla řešení.

Literatura

[MO] *Matematická olympiáda.* Dostupné z: `http://www.matematickaolympiada.cz`

Autoři: Tomáš Bárta, Filip Bialas, Matěj Doležálek, Šárka Gergelitsová, Zdeněk Halas, Antonín Jančařík, Jan Krejčí, Jakub Löwit, Luboš Pick, Marian Poljak, Martin Raška, Alena Skálová, Antonín Slavík, Zbyněk Šír, Radovan Švarc, Miroslav Zelený

Recenzenti: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Editoři: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Vydalo nakladatelství MatfyzPress jako svou 619. publikaci.

Vytištěno ze sazby dodané autory.

Publikace neprošla jazykovou korekturou.

Vytisklo Reprostředisko UK MFF

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

Vydání první

Praha 2020

ISBN 978-80-7378-425-6
ISBN 978-80-7378-427-0 (e-kniha)

Nakladatelství MFF UK
MatfyzPress