Rozvíjení matematických talentů na středních školách

III

KOLEKTIV AUTORŮ

Praha 2021

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace byla vydána v rámci Operačního programu – Výzkum, vývoj a vzdělávání (OP VVV) a jeho projektu *Zvyšování kvality matematického vzdělávání na středních školách: motivace ke studiu a příprava k matematickým soutěžím a olympiádám.*

Autoři: Filip Čermák, Matěj Doležálek, Šárka Gergelitsová, Antonín Jančařík, Jan Krejčí, Jakub Michal, Luboš Pick, Marian Poljak, Martin Raška, Alena Jechumtál Skálová, Antonín Slavík, Radovan Švarc, Miroslav Zelený

Recenzenti: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Mgr. Marie Holíková, Ph.D.

Editoři: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

ISBN 978-80-7378-452-2
ISBN 978-80-7378-453-9 (e-kniha)

Obsah

Úvod **5**

Kategorie A

A1: Součty v tabulkách **9**

A2: Tečny ke kružnici a podobné trojúhelníky **15**

A3: Teorie čísel s prvočísly a odhady **21**

A4: Poznámka o řešení soustav rovnic **27**

A5: Středy oblouků **33**

A6: Cykly a dělitelnost **41**

Kategorie B

B1: Pýthagorejské trojúhelníky a jiné úlohy **49**

B2: Shodné úsečky, úhly a kružnice **55**

B3: Kombinatorika **63**

B4: Grafy funkcí s absolutní hodnotou **71**

B5: Tětivové čtyřúhelníky a přenášení úhlů **77**

B6: Extrémní invarianty na šachovnici **83**

Kategorie C

C1: Čínská věta o zbytcích **95**

C2: Číslice a operace s nimi **103**

C3: Levely v planimetrii **109**

C4: Kombinatorické konstrukce a odhady **115**

C5: Sinová věta a přenášení vzdáleností **119**

C6: Diofantické rovnice **125**

Úvod

Tato kniha je souborem příspěvků vzniklých jako doprovodný materiál k přednáškám, které budou v tomto roce pořádány na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, a to v rámci projektu *Zvyšování kvality matematického vzdělávání na středních školách: motivace ke studiu a příprava k matematickým soutěžím a olympiádám.* Sledují přitom zadání úloh domácího kola 71. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol, přičemž každé úloze je věnován jeden příspěvek.

Tým autorů sestává na jedné straně ze zkušených pedagogů Matematicko-fyzikální fakulty, a na straně druhé z jejích studentů, kteří v Matematické olympiádě slavili v nedávné době znamenité úspěchy. Spojuje je značná zkušenost s úlohami typickými pro MO, o kterých všichni autoři často přednášejí, ať už pro soutěžící, nebo pro pedagogy středních škol. Každý z autorů ke svému příspěvku přistoupil poněkud odlišným způsobem a v malé míře došlo i k určitému překryvu témat.

Společným rysem všech příspěvků je jejich hlavní účel. Jejich četba má nejrůznějším způsobem usnadnit řešení úloh MO. Sborník je určen na prvním místě středoškolským profesorům, jimž může přinést inspiraci pro péči o talentované žáky v seminářích či při individuálních konzultacích. Věříme však, že je vhodný i přímo pro nadané studenty. Aniž by jim vyzradil řešení úloh, může je k úspěšné účasti v tomto ročníku MO povzbudit. Z dlouhodobého hlediska věříme, že představená látka a úlohy jsou vhodným obecným studijním materiálem pro adepty MO i pro všechny talentované žáky.

Všichni autoři by rádi poděkovali oběma recenzentům za pečlivě přečtení všech kapitol a za řadu cenných připomínek, které vedly ke zlepšení textu.

Praha, září 2021 — Zbyněk Šír, Zdeněk Halas

Kategorie

A

SOUČTY V TABULKÁCH

Marian Poljak

Existuje mnoho příkladů, ve kterých po nás zadání chce nějakým způsobem vyplnit tabulku čísly, či zjistit, jestli se nějak vyplnit čísly dá. V tomto příspěvku se dočteme, jak se s takovými příklady vypořádat a jaké triky můžeme často úspěšně použít. Této tématiky je i následující příklad z domácího kola 71. ročníku MO kategorie A.

Je možné vyplnit tabulku $n \times n$ jedničkami a dvojkami tak, aby byl součet čísel v každém řádku dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci dělitelný sedmi? Řešte a) pro $n = 9$, b) pro $n = 12$.

Nejdříve je důležité si uvědomit, jak takový příklad vyřešit a dospět k uspokojivé odpovědi na otázku kladenou v zadání. Jelikož se příklad ptá, zda je něco možné, mohou nastat v podstatě jen dvě možnosti. V prvním případě se nám tabulku požadovaným způsobem vyplnit povede, můžeme jednoznačně říct, že to možné je, a konstrukce, kterou jsme si vytvořili a zkontrolovali její správnost, je jediným potřebným důkazem. Ve druhém případě se nám tabulku vyplnit nepovede – většinou, nejedná-li se o velmi jednoduchý příklad, si však nemůžeme být jistí, že jsme opravdu vyzkoušeli všechny možnosti; těch totiž bývá velmi mnoho a vypsat je na papír je buď časově nevýhodné, nebo zcela nemožné. Proto se v takovou chvíli musíme uchýlit k nalezení nějakého neprůstřelného argumentu, často založeném na zbytcích či dělitelnosti, který bude důkazem, že požadovaným způsobem tabulku vyplnit nepůjde.

1 Řádkové a sloupcové součty

Úloha 1.1. *Lze tabulku 5×5 vyplnit celými čísly tak, aby byl součet v každém řádku lichý a v každém sloupci sudý?*

Je snadné si všimnout, že záleží jen na paritě čísel v tabulce – místo libovolných celých čísel si tedy můžeme bez újmy na obecnosti představit, že do tabulky dáváme jen čísla nula (sudé) a jedna (liché). Pravděpodobně při řešení každý brzy zjistí, že se tabulka takto nedaří vyplnit – v každém řádku musí být buď 1, 3 nebo 5 jedniček, což poté nesedí s podmínkou na sloupce. Aby byl součet čísel ve sloupci sudý, musí obsahovat 0, 2 nebo 4 jedničky. Při vyplňování nám vždy přebude řádek či sloupec, který podmínku poruší. Neprůstřelný důkaz, který vysvětluje a dokazuje tuto skutečnost, můžeme najít v součtu všech čísel tabulky.

Řešení. Součet všech čísel v tabulce (značme jej S) se rovná součtu všech pěti sloupců – ze zadání je součet v každém sloupci sudé číslo, součet S tedy bude také sudé číslo. S se však také musí rovnat součtu všech řádků. Sečteme-li řádky, dostaneme součet pěti ze zadání lichých čísel, výsledkem tedy bude liché číslo. Jenže součet všech čísel v tabulce nemůže být sudý i lichý zároveň, čímž dostáváme spor. □

Úloha 1.2. *Mějme tabulku 8×8 vyplněnou čísly $-1, 0, 1$. Je možné, aby součty ve sloupcích, řádcích i obou diagonálách byly navzájem různé?*

Řešení. Pro každý ze zmíněných součtů platí, že je to celé číslo mezi -8 a 8. Takových čísel je přesně 17. Máme však 8 řádkových součtů, 8 sloupcových součtů a dva diagonální součty – dohromady 18 součtů. Alespoň dva ze součtů tedy musí nutně nabývat stejné hodnoty – můžeme zmínit, že používáme známý Dirichletův princip. Vyplnit tabulku požadovaným způsobem proto není možné. □

Úloha 1.3 (MO, 70-C-I-2)**.** *Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0.*

Řešení. Můžeme snadno vytvořit blok 3×3, kde vlastnost platí. Z těchto bloků můžeme vyskládat tabulku $3k \times 3k$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, kde vlastnost také bude platit. Pro n nedělitelné třemi se nám to nepodaří. Důkazem je, že umístíme-li do nějakého řádku či sloupce j dvojek, musíme pro zachování vlastnosti do řádku dát i $2j$ mínus jedniček. Dohromady tam bude $3j$ čísel, velikost onoho řádku či sloupce tedy musí být dělitelná třemi. □

Úloha 1.4. *Tabulka $n \times n$ je vyplněna čísly 0, 1 a 2. Najděte všechny možné hodnoty n, pro které mohou součty řad a sloupců být $1, 2, \dots, 2n$, ne nutně v tomto pořadí.*

Řešení. Označíme $r_1, \dots, r_n$ a $c_1, \dots, c_n$ součty řádků a sloupců. Potom $r_1 + r_2 + \dots + r_n + c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1 + 2 + \dots + 2n = n(2n+1)$. Každé číslo v tabulce je do tohoto součtu započítáno přesně dvakrát, takže $n(2n+1)$ je sudé číslo. Protože je $2n+1$ vždy liché, musí nutně být n sudé. A pro $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ je možné vlastnost splnit, viz následující konstrukce.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}
$$

□

2 Další triky s tabulkami

Přeskládat tabulku bez újmy na obecnosti, a tím si usnadnit situaci, je další z triků, který při práci s tabulkami můžeme udělat, jak ilustruje následující příklad.

Úloha 2.1 (38th Canadian Mathematical Olympiad)**.** *Mějme obdélníkovou tabulku s m řádky a n sloupci vyplněnou nezápornými čísly, kde každý řádek i sloupec obsahuje alespoň jedno kladné číslo. Navíc, pokud se řádek a sloupec protínají v nějakém kladném čísle, pak je jejich součet stejný. Dokažte, že $m = n$.*

Řešení. Nejdříve uvažme případ, kdy mají všechny řádky stejný součet s, čímž také řešíme případ $m = 1$. Potom každý sloupec, který s některou z řad zajisté sdílí kladný prvek, musí mít také součet s. Sečteme-li nyní všechna čísla v tabulce přes řádky i přes sloupce, vyjde postupně ms a ns. Tato čísla se však musejí rovnat a s je zřejmě kladné, dostáváme tedy $m = n$.

Pokračujeme indukcí – předpokládejme, že máme tabulku $m \times n$ a ne všechny řádky mají stejný součet. Konkrétně řekněme, že $r < m$ řádků má součet s a zbylých $m - s$ řádků má jiný součet. Sloupce, které sdílejí kladný prvek s některým z těchto r řádků, musí mít také součet s a můžeme si snadno rozmyslet, že žádné jiné sloupce mít součet s nemůžou – počet takových sloupců označme c.

Bez újmy na obecnosti můžeme prohodit libovolné dva řádky či sloupce, můžeme tedy tabulku „přeskládat“ tak, aby prvních r řádků byly právě ty se součtem s a prvních s sloupců byly také právě ty se součtem s. Tím tabulku rozdělíme na čtyři menší tabulky. Levá horní ($r \times c$) bude ta se součty s, pravá horní ($r \times (n-c)$) a levá dolní ($(m-r) \times c$) budou muset obsahovat jen nuly, jinak se dostaneme do sporu s předpokladem – kdyby tam někde bylo něco kladného, dostali bychom průsečík s řádkem či sloupcem, který by najednou také měl mít součet s, přestože jsme všechny takové řádky i sloupce již umístili na začátek. Díky levé horní tabulce, ve které jsou všechny součty řádků i sloupců s, vidíme (viz indukční předpoklad), že musí platit $r = c$.

Vpravo dole dostáváme tabulku $(m-r) \times (n-c)$, pro kterou stále musí platit, že všechny její (kratší) řádky i sloupce musí obsahovat nějaké kladné číslo; z jejich původního obsahu jsme přece vyškrtli jen několik nul. Naše nová menší tabulka tedy bude splňovat zadání. Z indukčního předpokladu proto víme, že tím pádem musí být $m-r = n-c$, což nám spolu s $r = c$ dává i kýžené $m = n$.

$\square$

Alternativně jde úlohu vyřešit přímo, když si uděláme pořádek v indexech a opět se podíváme po jakémsi součtu čísel v tabulce.

Řešení. Označme a_{ij} číslo tabulky v i-tém řádku a j-tém sloupci, r_i součet v i-tém řádku a c_j součet v j-tém sloupci. Dále označme S množinu těch dvojic (i,j), ve kterých jsou kladná čísla. Víme, že pokud $(i,j) \in S$, pak $r_i = c_j$, odkud vyplývá vztah

$$\sum \left\{ \frac{a_{ij}}{r_i} : (i,j) \in S \right\} = \sum \left\{ \frac{a_{ij}}{c_j} : (i,j) \in S \right\}.$$

Když však opatrně vyčíslíme tyto sumy, zjistíme, že:

$$\begin{aligned}\sum \left\{ \frac{a_{ij}}{r_i} : (i,j) \in S \right\} &= \sum \left\{ \frac{a_{ij}}{r_i} : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_i} \cdot r_i = m.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum \{ \frac{a_{ij}}{c_i} : (i,j) \in S \} &= \sum \{ \frac{a_{ij}}{c_i} : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_i} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_i} \cdot c_i = n.\end{aligned}$$

Odtud máme $m = n$. $\square$

Úloha 2.2. *Mějme tabulku* 10×10*, k jejích políček je infikovaných. Každou vteřinu se infekce šíří – sousedí-li nějaké pole stranou s alespoň dvěma infikovanými poli, stane se také infikovaným. Určete nejvyšší možné k takové, že ať jsou původní infikovaná políčka rozmístěna jakkoliv, nestane se, že by se po nějaké době infikovalo všech* 100 *políček.*

Řešení. Můžeme si všimnout, že pokud by bylo $k = 10$ a původně infikovaná políčka tvořila diagonálu, infikuje se všech 100 políček. Musí tedy být $k < 10$. Nyní přichází těžká část úlohy, a to dokázat, že 9 infikovaných políček na infekci celé tabulky nestačí. Na pomoc přichází trik – uvažujme obvod aktuálně nakažené množiny políček a sledujme, jak se během průběhu nákazy mění. Vidíme, že se obvod této nakažené části nikdy nezvětší, může se dokonce zmenšit, sousedí-li nějaké nenakažené políčko s více než dvěma již infikovanými. Největší možný obvod, který infekce mohla mít zpočátku, je přitom 36 – nemůže se tedy stát, aby na konci byla nakažená celá tabulka, ta má totiž obvod 40. □

Zmíněné technice často používané v úlohách, ve kterých se vyskytuje nějaký proces, se říká *monovariant* – nějaké číslo či veličina, která se během onoho procesu nezvětšuje či nezmenšuje, čímž o tomto procesu a např. jeho konečnosti můžeme získat cenné informace. V našem případě byl monovariantem obvod množiny infikovaných políček.

Úloha 2.3. *Mějme tabulku* 9×9*, ve které jsou napsána čísla od* 1 *do* 81*, každé právě jednou. Dokažte, že existuje nějaká její podtabulka o rozměrech* 2×2*, která má součet větší než* 137*.*

Řešení. V tabulce 9×9 je přesně $8 \cdot 8 = 64$ takových podtabulek, označme jejich součty $S_1 \leq S_2 \cdots \leq S_{64}$. Předpokládejme pro spor, že jsou všechny nanejvýš 137, pro jejich součet by tedy muselo platit $S_1 + \cdots + S_{64} \leq 64 \cdot 137 = 8768$. Na druhou stranu, můžeme si rozmyslet, jak budou čísla z tabulky započítávána do oněch 2×2 podtabulek. Ta v rohu budou započítána pouze jednou, ta další na krajích dvakrát, vnitřních 49 políček bude započítáno čtyřikrát. Abychom získali dolní odhad na součet podtabulek, uvažme tu nejhorší možnost, kde ta největší čísla započítáme co nejméněkrát.

$$S_1 + \cdots + S_{64} \geq$$
$$1 \cdot (81 + 80 + 79 + 78) + 2 \cdot (77 + \cdots + 50) + 4 \cdot (49 + \cdots + 1) = 8774.$$

Tím jsme došli ke sporu, některá podtabulka tedy musí mít součet alespoň 138. □

TEČNY KE KRUŽNICI A PODOBNÉ TROJÚHELNÍKY

Šárka Gergelitsová

Úlohy o podobných trojúhelnících a tečnách ke kružnicím patří k základním geometrickým znalostem. V zadání úlohy 71-A-I-2 Matematické olympiády budeme vlastnosti tečen ke kružnicím a úhly v trojúhelnících hledat. Její zadání zní:

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2.

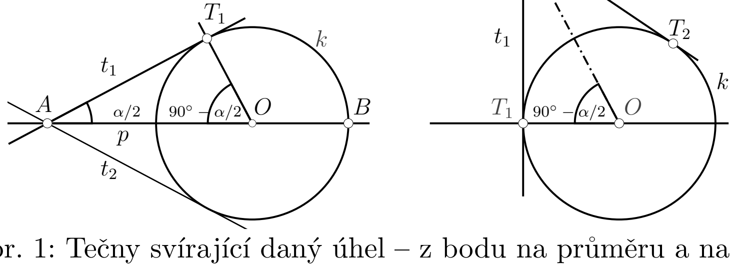
1 Úhel tečen

Následující úlohy jsou velmi snadné. K jejich řešení stačí poznatek, že tečna kružnice je kolmá na poloměr v bodě dotyku, a základní vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku.

Úloha 1.1. *Na přímce p, která prochází středem dané kružnice k, najděte takové body, aby polopřímky tečen z těchto bodů ke kružnici k svíraly úhel o velikosti α ($\alpha < 180°$).*

Řešení. Trojúhelník AT_1O na obrázku 1 je pravoúhlý a přímka AO je osa úhlu tečen. Proto $|\sphericalangle OAT_1| = \alpha/2$ a $|\sphericalangle AOT_1| = 90° - \alpha/2$. Z toho vychází konstrukce, která má vždy řešení ($\alpha/2 < 90°$):

Sestrojíme takový bod T_1 kružnice k, že $|\sphericalangle AOT_1| = 90° - \alpha/2$ a vedeme jím kolmici k poloměru OT_1. Ta protne přímku p v hledaném bodě A. Druhé řešení je bod středově souměrný s bodem A dle středu O.

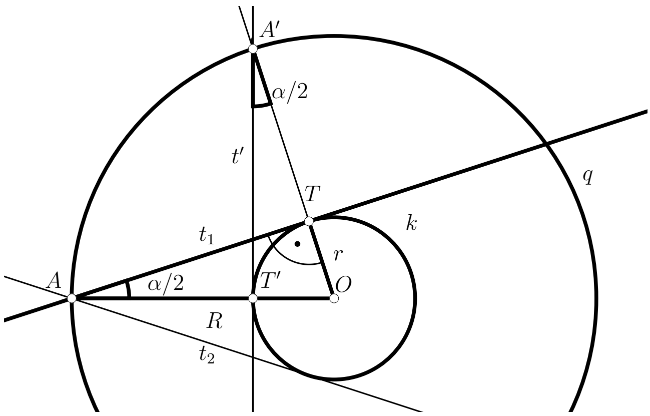


Obr. 1: Tečny svírající daný úhel – z bodu na průměru a na tečně

Pro $\alpha = 60°$ je $|\sphericalangle AOT_1| = 90° - \alpha/2 = 60°$ a sestrojený bod A je vrchol jednoho rovnostranného trojúhelníku opsaného dané kružnici. Pro $\alpha = 120°$ je $|\sphericalangle AOT_1| = 30°$ a sestrojený bod A je vrchol jednoho pravidelného šestiúhelníku opsaného dané kružnici.

Na obrázku 1 vlevo je sestrojen bod A na průměru kružnice, vpravo je podobně sestrojený bod P na zvolené tečně kružnice takový, že tečny ke kružnici z P také svírají úhel α. □

Úloha 1.2. *Určete množinu všech bodů roviny, které mají tu vlastnost, že tečny z nich vedené k dané kružnici k svírají úhel velikosti* $\alpha < 180°$.



Obr. 2: Kružnice, na níž leží vrcholy úhlů

Řešení. Řešení předchozí úlohy jsme mohli popsaným postupem sestrojit na libovolné přímce p procházející středem dané kružnice. Dokážeme, že hledanou množinou bodů je kružnice q soustředná s danou kružnicí $k(O, r)$ o poloměru $R = \frac{r}{\sin(\alpha/2)}$, kde r je poloměr kružnice k.

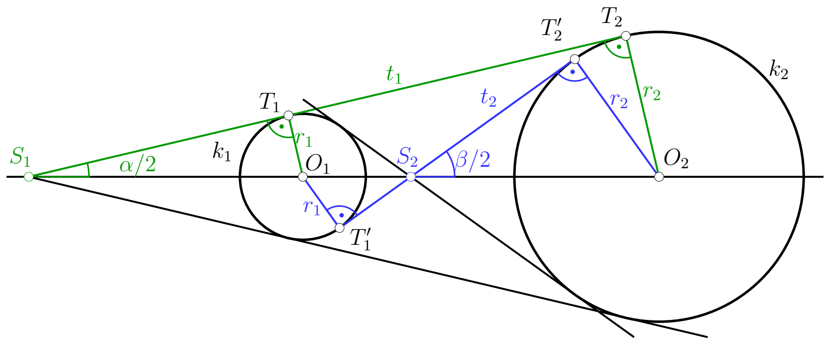
Všechny body kružnice q zřejmě mají danou vlastnost.

Žádný jiný bod danou vlastnost nemá: Pro všechny body M roviny ležící v mezikruží kružnic k, q platí $|MO| < |AO| = \frac{r}{\sin(\alpha/2)}$. Pro ostrý úhel γ při vrcholu M trojúhelníku MOT platí $\sin\gamma = \frac{r}{|MO|} > \sin(\alpha/2)$, tedy $2\gamma > \alpha$ a tečny svírají větší úhel.

Pro všechny body roviny ležící vně kružnice q analogicky platí, že tečny ke k svírají menší úhel než α. Z bodů roviny, které leží na nebo uvnitř kružnice k, k ní nelze vést dvojici tečen. □

Úloha 1.3. *Na přímce p, která prochází středy daných kružnic* k_1, k_2 *najděte všechny takové body S, aby tečny z bodu S ke kružnici* k_1 *svíraly stejný úhel jako tečny z bodu S ke kružnici* k_2. *Určete velikost sevřeného úhlu a vypočtěte vzdálenosti mezi nalezenými body a středy daných kružnic.*

Řešení. Hledanými body jsou body, z nichž lze ke kružnicím vést společné tečny, tedy středy stejnolehlostí, v nichž je jedna z kružnic obrazem druhé, pokud tyto středy leží vně obou kružnic. Takové body jsou nejvýše dva.



Obr. 3: Společné tečny dvou kružnic

Připomeňme si, že pro středy S_1, S_2 stejnolehlosti daných neshodných kružnic $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_1, r_2)$ a pro úhly α, β sevřené tečnami (viz obr. 3) platí:

$$\frac{r_1}{|S_1O_1|} = \frac{r_2}{|S_1O_2|} = \sin(\alpha/2) \quad \text{a} \quad \frac{r_1}{|S_2O_1|} = \frac{r_2}{|S_2O_2|} = \sin(\beta/2).$$

Proto

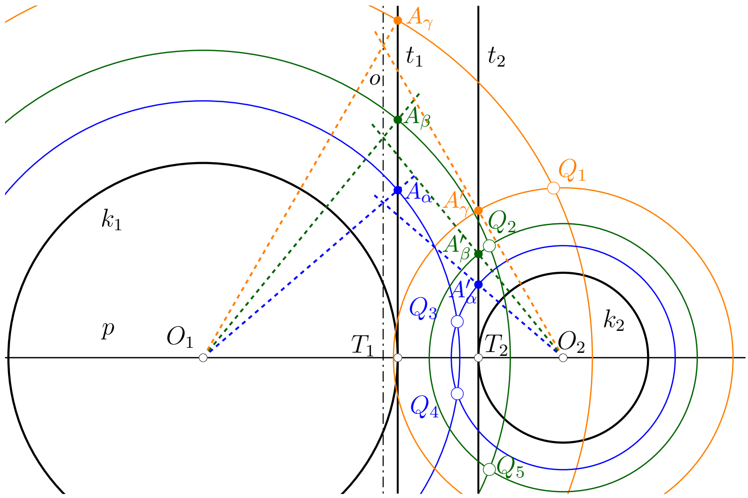
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{|S_1O_1|}{|S_1O_2|} = \frac{|S_2O_1|}{|S_2O_2|}.$$

□

Následující otázku ponecháváme k samostatnému rozmyšlení. Úlohu letošního domácího kola MO vyřešíme snadno i bez ní.

Úloha 1.4. *Zkuste odvodit, co je množinou všech bodů, z nichž je vidět dvě dané kružnice pod stejným úhlem.*

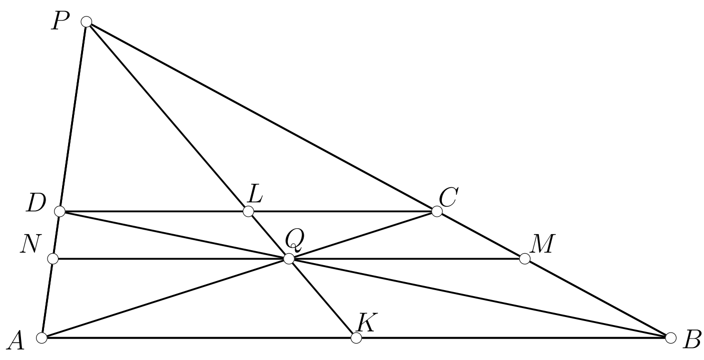
Návodem může být konstrukce několika bodů požadované vlastnosti. Na obrázku 4 je takových bodů vidět pět: Ke kružnicím $k_1(O_1, |O_1T_1|)$, $k_2(O_2, |O_2T_2|)$, jsme sestrojili body $Q_1, ..., Q_5$, z nichž je kružnice k_1 vidět vždy pod stejným úhlem jako kružnice k_2. Poloměry kružnic, které jsou množinami vrcholů úhlu téže zvolené velikosti jednak pro k_1, jednak pro k_2, jsou délky přepon pravoúhlých trojúhelníků OTA, jejichž jedna odvěsna je O_1T_1 resp. O_2T_2, druhá leží na příslušné tečně t_1, resp. t_2, každé z kružnic a úhly při vrcholech O_1, O_2 jsou shodné.



Obr. 4: Z bodů Q_1 až Q_5 je vidět k_1 pod stejným úhlem jako k_2.

2 Podobné trojúhelníky v lichoběžníku

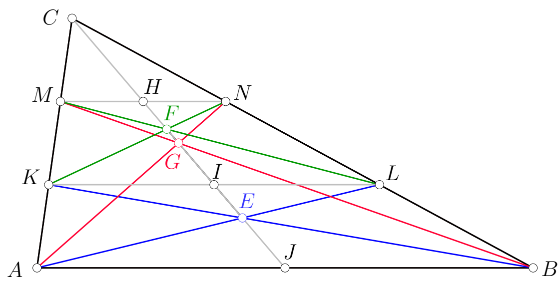
Připomeňme si základní vlastnosti lichoběžníku. Na obrázku 5 je sestrojen lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, průsečík P přímek BC, AD a průsečík Q úhlopříček. Rovnoběžka se základnami vedená bodem Q protíná ramena v bodech M, N. Najděte všechny sestrojené podobné trojúhelníky a dvojice úseček, jejichž poměr délek je jednak $a : c$, jednak $b : d$, kde a, b, c, d jsou délky stran lichoběžníku. Všechny podobnosti zdůvodněte.



Obr. 5: Zkoumejte podobné trojúhelníky

Poměry délek v podobných trojúhelnících pomohou například při řešení úlohy 66-C-I-5 Matematické olympiády:

Úloha 2.1. *V daném trojúhelníku ABC zvolme uvnitř strany AC body K, M a uvnitř strany BC body L, N tak, že $|AK| = |KM| = |MC|$ a $|BL| = |LN| = |NC|$. Dále označme E průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABLK$, F průsečík úhlopříček lichoběžníku $KLNM$ a G průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABNM$. Dokažte, že body E, F a G leží na těžnici trojúhelníku ABC z vrcholu C, a určete poměr $|GF| : |EF|$.*



Obr. 6: Poměry délek, úloha 66-C-I-5

Řešení. Příčky trojúhelníku rovnoběžné se stranou AB jsou základnami lichoběžníků a pro poměry jejich délek platí

$$|AB| : |KL| : |MN| = |AC| : |KC| : |MC| = 3 : 2 : 1.$$

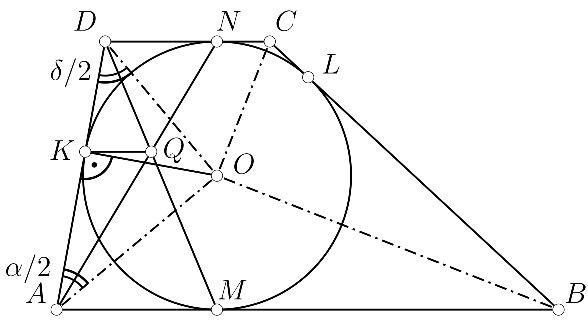
Nejprve dokážeme, že průsečíky úhlopříček leží na těžnici trojúhelníku ABC, která půlí stranu AB: Těžnice půlí všechny příčky rovnoběžné se stranou AB. Označme E_1 průsečík úhlopříčky KB v lichoběžníku $ABLK$ s touto těžnicí a J, I středy základen. Pak jsou trojúhelníky IKE_1, JBE_1 podobné s poměrem odpovídajících si stran $3 : 2$, tedy $|JE_1| : |E_1I| = 3 : 2$. Podobně pro průsečík E_2 úhlopříčky LA s danou těžnicí platí $|JE_2| : |E_2I| = 3 : 2$. Proto je $E_1 = E_2$ a bod $E = E_1 = E_2$ je průsečík úhlopříček.

Z poměru, v němž dělí průsečíky úhlopříček spojnice středů základen jednotlivých lichoběžníků, určíme číselně polohu bodů E, F, G na těžnici trojúhelníku a odtud hledaný poměr. Ukáže se, že $|GF| : |EF| = 5 : 32$. Úplné řešení úlohy je na webu MO. □

Úloha 2.2. *Lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD je tečnový. Body dotyku vepsané kružnice se základnami AB, CD označíme po řadě M, N, body dotyku vepsané kružnice s rameny AD, BC označíme po řadě K, L. Dokažte, že platí:*

a) Je-li Q průsečík AN a DM, je $KQ \parallel CD$.

b) $|AK| \cdot |KD| = |BL| \cdot |LC|$.



Obr. 7: Tečnový lichoběžník

Řešení. a) Lichoběžník $ABCD$ je tečnový, střed vepsané kružnice označme O. Strany lichoběžníka jsou tečny k vepsané kružnici, proto $|AM| = |AK|$ a $|DN| = |DK|$. Z podobných trojúhelníků AQM, NQD plyne $|AQ| : |QN| = |AM| : |ND|$. Tedy $|AQ| : |QN| = |AK| : |KD|$, proto je $KQ \parallel CD$.

b) Protože jsou úsečky MO, NO kolmé k základnám, je střed úsečky MN středem O vepsané kružnice. AO, DO jsou osy úhlů α, δ. Protože $\alpha + \delta = 180°$, je $\alpha/2 + \delta/2 = 90°$. Trojúhelník AOD je tudíž pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu O a KO je jeho výška. Proto (podle věty o výšce plynoucí z podobnosti trojúhelníků AKO, OKD) platí $|AK| \cdot |KD| = |KO|^2$. Podobně $|BL| \cdot |LC| = |LO|^2$. A protože úsečky KO, LO jsou poloměry vepsané kružnice, z rovnosti $|KO| = |LO|$ plyne dokazované tvrzení. □

Literatura

[Pra] V. V. Prasolov: *Zadači po geometrii I.*, Moskva, 1986 (rusky).

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

TEORIE ČÍSEL S PRVOČÍSLY A ODHADY

Martin Raška

Jedním z klasických typů olympiádních úloh v teorii čísel je zadání, ve kterém máme nějakou rovnost či podmínky kladené na dělitelnost a máme rozhodnout, která přirozená čísla tato omezení splňují. Příkladem takovéto úlohy je i 71-A-I-3 matematické olympiády:

Najděte všechna celá čísla $n > 2$ taková, že číslo n^{n-2} je n-tá mocnina celého čísla.

Pro úlohy tohoto typu velmi často platí, že zadání splňuje pouze několik málo nízkých hodnot a tou těžší částí je dokázat, že pro velká n zadaná situace nastat nemůže. Na tento typ důkazů neexistuje jeden jednoduchý recept, nicméně v první části příspěvku si ukážeme, že je často užitečné dívat se na úlohu z pohledu prvočísel. V druhé části se podíváme na některé základní odhady a porovnáme velikosti polynomiálních a exponenciálních funkcí.

1 Prvočísla a p-valuace

Definice 1.1. Pro přirozená čísla a a b řekneme, že *a dělí b* (značíme $a \mid b$), pokud existuje přirozené číslo c splňující $b = ac$.

Uvažování dělitelnosti a prvočísel v teorii čísel často stačí k vyřešení úlohy. Například rovnice $n(n+3) = 3^m$ nemůže mít nad přirozenými čísly řešení, neboť prvočíslo 2 dělí levou stranu (dva činitelé v součinu mají různou paritu) a zároveň nedělí tu pravou.

Občas se ale hodí umět i konkrétněji říkat, v jak velkých mocninách prvočíslo daný výraz dělí. To motivuje následující definici.

Definice 1.2. Pro prvočíslo p definujeme *p-valuaci* přirozeného čísla n jako největší nezáporné celé číslo k takové, že $p^k \mid n$. Značíme $v_p(n) = k$.

Například $v_5(15) = 1$, $v_2(60) = v_2\big(2^2 \cdot 3 \cdot 5\big) = 2$ a $v_3(16) = 0$. Následující cvičení popisující základní vlastnosti p-valuací je pouze jednoduchou aplikací definice a faktu, že pro každé přirozené číslo n existuje jeho jednoznačný rozklad na součin prvočísel: $n = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$.

Cvičení 1.3. *Pro prvočíslo p a přirozená čísla m, n dokažte, že platí:*

(i) $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$,

(ii) $v_p(m^n) = n \cdot v_p(m)$,

(iii) $v_p(m+n) \geq \min(v_p(m), v_p(n))$,

(iv) $m \mid n$ *právě tehdy, když pro každé prvočíslo* p *platí* $v_p(m) \leq v_p(n)$.

Pro začátek si na úloze ukažme, jak nám značení pomocí p-valuací a aplikace předcházejícího cvičení může usnadnit práci.

Úloha 1.4. *Jsou dána přirozená čísla* a, b, c *splňující* $a^b \mid b^c$, $a^c \mid c^b$. *Dokažte, že* $a^2 \mid bc$.

Řešení. Stačí, abychom dokázali, že pro každé prvočíslo p platí $2v_p(a) = v_p(a^2) \leq v_p(bc)$. Zafixujme si tedy libovolné prvočíslo p. Z podmínky $a^b \mid b^c$ dostaneme nerovnost $b \cdot v_p(a) = v_p(a^b) \leq v_p(b^c) = c \cdot v_p(b)$. Analogicky z podmínky $a^c \mid c^b$ dostaneme $c \cdot v_p(a) \leq b \cdot v_p(c)$.

Nyní již platí

$$v_p(b) + v_p(c) \geq \frac{b}{c} v_p(a) + \frac{c}{b} v_p(a) = \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) v_p(a) \geq 2v_p(a),$$

což jsme přesně chtěli. Poslední nerovnost je důsledkem toho, že pro všechna kladná čísla x platí $x + \frac{1}{x} \geq 2$. □

Další využití p-valuací najdeme u úloh, kde pracujeme s faktoriály, tedy $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Uveďme si základní tvrzení s názvem *Legendreova formule*.

Tvrzení 1.5. *Buď* p *prvočíslo a* n, M *přirozená čísla splňující* $n < p^M$. *Pak platí*

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^M} \right\rfloor,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ *představuje dolní celou část čísla* x.

Důkaz. V součinu $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ je právě $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ činitelů dělitelných prvočíslem p, za každé tedy musíme do p-valuace přičíst jedničku. Dále musíme přičíst další jedničku za každého činitele dělitelného p^2 – těch je právě $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, podobně musíme připočítat jedničku za každého činitele dělitelného p^3, atd. Tenhle proces skončí ve chvíli, kdy mocnina prvočísla bude větší než n, tato mocnina už tedy nebude dělit žádného činitele. □

Toto tvrzení použijeme k důkazu 4. úlohy z Mezinárodní matematické olympiády 2019.

Úloha 1.6. *Najděte všechny dvojice přirozených čísel (n, k), které splňují*

$$(2^k - 1)(2^k - 2)(2^k - 4) \cdots (2^k - 2^{k-1}) = n!.$$

Řešení. Podíváme se na 2-valuace na obou stranách rovnosti. Z minulého tvrzení dostáváme $v_2(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^M} \right\rfloor$ pro vhodné přirozené číslo M. To můžeme pomocí součtu geometrické posloupnosti shora odhadnout jako

$$v_2(n!) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^M} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^M}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{n}{2} \cdot 2 = n.$$

Naopak pro levou stranu dostaneme

$$(2^k-1)(2^k-2) \cdots (2^k-2^{k-1}) = 2^{1+2+\cdots+(k-1)}(2^k-1)(2^{k-1}-1) \cdots (2^1-1),$$

tedy

$$\begin{aligned} &v_2\left((2^k - 1)(2^k - 2)(2^k - 4) \cdots (2^k - 2^{k-1})\right) \\ &\qquad = 1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}. \end{aligned}$$

Protože se 2-valuace levé a pravé strany musí rovnat, tak porovnáním dostaneme $\frac{k(k-1)}{2} < n$. Dosazením této nerovnosti zpátky do zadání musí platit

$$L = (2^k - 1)(2^k - 2)(2^k - 4) \cdots (2^k - 2^{k-1}) > \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)!.$$

Ukážeme ale, že tady už nastává problém, neboť pro $k \geq 6$ platí opačná nerovnost.

Nejprve jednoduše odhadněme levou stranu jako $L < (2^k)^k = 2^{k^2}$. Dále ukážeme, že $2^{k^2} < \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)!$ pro $k \geq 6$. Pro $k = 6$ se to dá přímočaře ověřit: $2^{36} < 6{,}9 \cdot 10^{10}$ a $\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)! = 15! > 1{,}3 \cdot 10^{12}$. Pro $k \geq 7$ následně

$$\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)! = 15! \cdot 16 \cdot 17 \cdots \frac{k(k-1)}{2} > 2^{36} \cdot 16^{\frac{k(k-1)}{2} - 15},$$

pravá strana je rovna $2^{k^2} \cdot 2^{k(k-2)-24}$ a to je pro $k \geq 7$ skutečně větší než 2^{k^2}.

Dohromady, pokud (n, k) splňuje zadání, tak $k \leq 5$. Je už snadné těchto 5 hodnot dosadit a zjistit, že jediná řešení jsou $(1, 1)$ a $(3, 2)$.

$\square$

Ukázali jsme si základní použití p-valuací. Další cestou, kterou se lze tímhle směrem vydat, jsou například hlubší tvrzení okolo Legendreovy formule nebo tzv. *Lifting the Exponent* lémma, které popisuje p-valuace výrazů typu $a^n \pm b^n$.

2 Odhady

Jak bylo vidět na konci minulého příkladu, uvažování prvočíselných dělitelů nás umí dostat do situace, ve které dostaneme odhady, které platí jenom pro konečně mnoho malých hodnot (ty už pak typicky není problém vyřešit separátně). Dalším příkladem takovéhoto odhadu je například $3^n < n^3 + 5n + 2$.

n	1	2	3	4	5	6	6
3^n	3	9	27	81	243	729	2187
$n^3 + 5n + 2$	8	20	44	86	152	248	380

Z tabulky pro prvních pár hodnot n vidíme, že na začátku je sice funkce $n^3 + 5n + 2$ větší, nicméně po čase skutečně začne velmi výrazně převažovat 3^n. Nabízí se tedy hypotéza, že pro $n \geq 5$ je skutečně vždy $3^n > n^3 + 5n + 2$. Jak bychom tedy tuto nerovnost dokazovali? Ve chvíli, kdy pracujeme s přirozenými čísly, je obecně velmi typickým a užitečným nástrojem matematická indukce.

Úloha 2.1. *Dokažte, že pro přirozené číslo $n \geq 5$ platí $3^n > n^3 + 5n + 2$.*

Řešení. První krok indukce máme hotový, neboť vidíme, že pro $n = 5$ nerovnost skutečně platí. Dále pro indukční krok předpokládejme, že nerovnost platí pro n a ukážeme, že platí i pro $n + 1$. Platí tedy $3^{n+1} > 3 \cdot (n^3 + 5n + 2)$ a chtěli bychom nerovnost $3n^3 + 15n + 6 > (n + 1)^3 + 5(n+1)+2$. To je ekvivalentní $2n^3 + 7n > 3n^2 + 2$, což je očividně pravda pro všechna n. $\square$

Nabízí se otázka, jestli nerovnost tímto směrem při porovnání funkcí tohoto typu nastává obecně. Před zodpovězením této otázky nejdříve definujme, co takovýmito funkcemi vůbec myslíme. Funkce typu $f(n) = c^n$, kde c je konstanta, nazýváme *exponenciálními* funkcemi. Naopak výraz $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ se nazývá *polynomem k-tého stupně.* Skutečně pak platí, že pokud je $c > 1$ a libovolně zvolíme a_i a stupeň k, tak už existuje N takové, že pro všechna $n > N$ platí $c^n > a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ (konstanta N je závislá na volbě c, a_i a k). Jednoduše řečeno tedy exponenciální funkce po čase vždy přeroste libovolný polynom. Podmínka $c > 1$ je v tomto případě opravdu nutná, neboť pro $0 < c < 1$ výraz c^n s rostoucím n naopak klesá a pro záporná c mění znaménko.

Toto tvrzení si pořádně dokážeme jenom pro speciální typy polynomů, nicméně k zobecnění pak už chybí pouze krůček.

Tvrzení 2.2. *Buď a reálné číslo, $c > 1$ reálné číslo a k přirozené číslo. Pak existuje přirozené číslo N takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq N$ platí*

$$c^n > a \cdot n^k.$$

Důkaz. Pro $a \leq 0$ je nerovnost zřejmá, předpokládejme tedy $a > 0$. Situaci stačí dokázat pouze pro $k = 1$, neboť můžeme na obou stranách nerovnosti udělat k-tou odmocninu a dostat ekvivalentní nerovnost $(\sqrt[k]{c})^n > \sqrt[k]{a}n$, kde nové proměnné $c' = \sqrt[k]{c}$ a $a' = \sqrt[k]{a}$ rovněž splňují podmínky ze zadání. Mějme tedy $k = 1$ a chtějme dokázat $c^n > an$. Protože $c > 1$, tak existuje $d > 0$, že $c = 1 + d$. Z binomické věty pro $n \geq 2$ dostaneme $c^n = (1 + d)^n = 1 + nd + \frac{n(n-1)}{2}d^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}d^2$. Chceme tedy $\frac{n(n-1)}{2}d^2 - an > 0$. To ovšem nutně pro dost velká n platí, neboť tato kvadratická funkce je nezáporná maximálně na omezeném intervalu a pro dost velké n tak nerovnost platí. $\square$

K důkazu tohoto tvrzení pro obecný polynom již stačí nasčítat tuto nerovnost několikrát s dobře zvolenými konstantami.

Ačkoliv výše uvedené tvrzení nijak neříká, jak velká konstanta N je, analýzou důkazu by šla tato dolní mez určit explicitně. Nicméně takto získaná konstanta často může být zbytečně nadsazená a v praxi se typicky nejlépe vyplatí analýzou malých hodnot příslušnou hranici uhodnout a zbytek dokázat indukcí. Je nutné podotknout, že udělat důkaz je skutečně nutné – to že exponenciální funkce v jednu chvíli přeroste polynomiální funkci ještě neznamená, že ji polynomiální funkce nemůže na malou chvíli někdy v budoucnu ještě přerůst zpátky. Funkce se klidně o to, která má vyšší hodnotu, můžou dlouhou chvíli přetahovat – tvrzení výše jenom říká, že nakonec v tomhle případě vždy musí zvítězit ta exponenciální. Například u funkcí $1,0001^n$ a $1000n^{1000}$ nastane zmíněná nerovnost až pro řádově $n > 2 \cdot 10^8$.

Na závěr se ještě nabízí otázka, jak to dopadne při porovnávání dvou exponenciálních nebo dvou polynomiálních funkcích. Na tuto otázku odpovídá následující cvičení.

Cvičení 2.3. *Dokažte, že pro následující volby funkcí f a g vždy existuje N takové, že pro všechna $n > N$ je $f(n) > g(n)$.*

1. $f(n) = a^n,\ g(n) = c \cdot b^n, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a > b \geq 0.$
2. $f(n) = n^{k+1} + a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},$
   $g(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0, \quad b_i \in \mathbb{R}.$

Literatura

[SŠ] J. Svoboda, Š. Šimsa: *Seriál – Teorie čísel II.* Korespondenční seminář MKS. Dostupné z: `https://prase.cz//library/s_TeorieCisel_2/s_TeorieCisel_2.pdf`.

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

POZNÁMKA O ŘEŠENÍ SOUSTAV ROVNIC

Miroslav Zelený

V matematice často hledáme reálná čísla, která splňují jisté podmínky. Pokud jsou tyto podmínky vyjádřeny ve tvaru algebraických rovnic, pak stojíme před úkolem vyřešit soustavu rovnic. Takovou úlohou je i úloha 71-A-I-4 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy + 1 &= z^2, \\ yz + 2 &= x^2, \\ zx + 3 &= y^2. \end{aligned} \tag{0.1}$$

1 Formulace úlohy a základní postup při řešení

Nechť n, m jsou přirozená čísla. Soustavu m rovnic o n neznámých můžeme popsat pomocí m-tice funkcí $F_1, \ldots, F_m$, jejichž definiční obory jsou obsaženy v $\mathbb{R}^n$. Naším úkolem je pak nalézt všechny n-tice reálných čísel $[x_1, \ldots, x_n]$ splňující

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Na první pohled by se mohlo zdát, že úloha (0.1) není ve tvaru (1.1). Stačí však převést členy na pravé straně a obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} xy + 1 - z^2 &= 0, \\ yz + 2 - x^2 &= 0, \\ zx + 3 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava je již ve tvaru (1.1), přičemž $n = m = 3$ a funkce $F_1, F_2, F_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mají tvar

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= xy + 1 - z^2, \\ F_2(x, y, z) &= yz + 2 - x^2, \\ F_3(x, y, z) &= zx + 3 - y^2. \end{aligned}$$

Podle typu funkcí $F_1, \dots, F_m$ pak rozlišujeme příslušné typy soustav. Základní rozlišení je na *soustavy lineární* a *soustavy nelineární.* Mezi nelineární soustavy patří i soustava (0.1). V případě lineární soustavy jsou funkce $F_1, \dots, F_m$ lineární (někdy říkáme afinní). Pak má soustava (1.1) tvar

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &+ \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &+ \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde a_{ij}, b_i, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, jsou daná reálná čísla. Zde mají příslušné funkce $F_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, tvar

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i.$$

Lineární soustavy lze řešit pomocí *Gaussovy eliminační metody*, která je vyložena v řadě publikací a zde se jí nebudeme věnovat podrobně. S ohledem na náš hlavní předmět zájmu – soustavy nelineární – stačí uvést následující.

Gaussova metoda spočívá v tom, že soustavu jistým způsobem transformujeme a po konečně mnoha krocích obdržíme soustavu, která je již snadno řešitelná. Důležité je, že během transformace nedochází ke změně množiny řešení soustav. Množina řešení výchozí soustavy je pak stejná jako množina řešení finální soustavy. Zde jsou typy transformací, které při řešení lineárních soustav používáme:

(1) záměna pořadí rovnic,

(2) vynásobení rovnice nenulovým reálným číslem,

(3) přičtení násobku jedné rovnice k jiné rovnici.

Zadanou soustavu se pak snažíme transformovat tak, aby měla *odstupňovaný* tvar, tj. $(i+1)$-ní rovnice má všechny koeficienty u proměnných $x_1, \dots, x_n$ nulové nebo začíná s větším počtem nulových koeficientů než i-tá rovnice. Soustavu v tomto tvaru je již snadné vyřešit. Podrobnější rozbor ukazuje, že množina řešení soustavy (1.2) pak může být

- prázdná, tj. soustava nemá žádné řešení,
- jednoprvková, tj. řešení je právě jedno,
- nekonečná.

Bohužel neexistuje žádná obecná metoda řešení nelineárních soustav. Neplatí ani předchozí tvrzení o počtu řešení – nelineární soustava může mít například právě 6 řešení, jak uvidíme dále. Přesto však v jistých speciálních situacích nelineární soustavu vyřešit lze. Z výše uvedeného plyne, že postup řešení zde závisí mnohem více na tvaru soustavy než v případě lineární soustavy. Úpravy (1)–(3) je možné použít i v případě nelineárních soustav a také v tomto případě tyto úpravy nemění množinu řešení. V dalších krocích se pak snažíme vhodnými úpravami vypočítat alespoň některé neznámé nebo odvodit nějaké algebraické vlastnosti možného řešení. Zde je důležité si uvědomit, že často mají naše výpočty tuto logickou formu:

$$\begin{aligned}&\text{Je-li } [x_1, \ldots, x_n] \text{ řešení soustavy (1.1), pak}\\ &\qquad\qquad [x_1, \ldots, x_n] \in M, \text{ kde } M \text{ je vhodná množina.}\end{aligned} \tag{1.3}$$

Množina M pak obsahuje všechna řešení soustavy (1.1), ale ne každý prvek množiny M je nutně řešením. Pro dořešení úlohy je třeba zjistit, které prvky množiny M jsou řešením (1.1). Je-li M například konečná, pak můžeme provést zkoušku neboli postupným dosazením prvků z M do (1.1) vyloučit ty prvky M, které nejsou řešením soustavy (1.1). Zde tedy nemá zkouška charakter kontroly výpočtu, ale je nedílnou součástí kompletního řešení. Má-li mít (1.3) nějaký význam pro řešení konkrétní soustavy, musí být množina M podstatně menší než definiční obor funkcí F_i. Právě provedené úvahy použijeme v následujících úlohách.

2 Několik úloh

Úloha 2.1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1,\\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4x - 3,\\ x + y + z &= 2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Řešení. Nejprve od první rovnice v (2.1) odečteme rovnici druhou a dostaneme $0 = -4x + 4$. Odtud plyne $x = 1$. Tuto hodnotu dosadíme do první rovnice a dostaneme $y^2 + z^2 = 0$. Odtud plyne $y = z = 0$. Trojice $[1, 0, 0]$ je tedy nyní jediným možným řešením soustavy (2.1). Po dosazení do (2.1) však zjistíme, že není splněna třetí rovnice. Úloha tedy nemá žádné řešení. □

Úloha 2.2. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} x + y &= z^2, \\ x + z &= y^2, \\ y + z &= x^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Řešení. Nejprve od první rovnice v (2.2) odečteme rovnici druhou a výsledek upravíme. Dostaneme

$$y - z = (z - y)(z + y). \tag{2.3}$$

Z (2.3) plyne, že platí $y - z = 0$ nebo $-1 = z + y$. Druhá možnost je ve sporu s třetí rovnicí v (2.2), neboť kvadrát reálného čísla je vždy nezáporný. Musí tedy být $y = z$. Odečteme-li třetí rovnici od druhé v (2.2), dostaneme po úpravě $x - y = (y - x)(y + x)$. Podobně jako v předchozím případě dostaneme, že buď $x = y$ nebo $x + y = -1$. Druhá možnost je ve sporu s první rovnicí v (2.2). Musí tedy platit $x = y = z$. Potom například z třetí rovnice v (2.2) dostaneme $2y = y^2$, a tedy $y = 0$ nebo $y = 2$.

Uvědomme si ještě jednou, že předchozí postup dává pouze to, že množina řešení soustavy (2.2) je obsažena v množině

$$M = \big\{(0, 0, 0), (2, 2, 2)\big\}.$$

Obě trojice z M však vyhovují soustavě (2.2) a úloha je vyřešena. □

Úloha 2.3. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$yz + 2ux + v = 0, \tag{2.4}$$
$$xz + 2uy + v = 0, \tag{2.5}$$
$$xy + 2uz + v = 0, \tag{2.6}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \tag{2.7}$$
$$x + y + z = 0. \tag{2.8}$$

Řešení. Odečteme (2.5) od (2.4) a po úpravě dostaneme

$$(2u - z)(x - y) = 0. \tag{2.9}$$

Odtud plyne, že musí být $z = 2u$ nebo $x = y$. Podobně odečtením (2.6) od (2.5) dostaneme

$$(2u - x)(y - z) = 0. \tag{2.10}$$

Toto dává $x = 2u$ nebo $y = z$. Ze vztahů (2.9) a (2.10) tedy vyplývá, že musí být buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na první případ, kdy $x = y$. Z (2.8) máme $z = -2x$ a (2.7) pak dává $6x^2 = 1$, tj. $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ nebo $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$. K těmto bodům již snadno dopočítáme příslušná y, z, u a v. Případy $y = z$ a $z = x$ vyřešíme obdobně. Obdržíme tato možná řešení $[x, y, z, u, v]$ naší soustavy:

$$\begin{aligned}
&\left[\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{2\sqrt{6}}, \tfrac{1}{6}\right], \qquad &&\left[-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{2\sqrt{6}}, \tfrac{1}{6}\right], \\
&\left[-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{2\sqrt{6}}, \tfrac{1}{6}\right], \qquad &&\left[\tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{2\sqrt{6}}, \tfrac{1}{6}\right], \\
&\left[\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{2\sqrt{6}}, \tfrac{1}{6}\right], \qquad &&\left[-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{2\sqrt{6}}, \tfrac{1}{6}\right].
\end{aligned}$$

Dosazením do (2.4)–(2.8) ověříme, že jde o hledaná řešení. □

Úloha 2.4. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{1 + x^2} = 2xz, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{1 + y^2} = 2yz. \tag{2.13}$$

Řešení. Z (2.12) a (2.13) vyplývá

$$2xz(1 + x^2) = 2yz(1 + y^2). \tag{2.14}$$

Z (2.12) vyplývá, že $z \neq 0$. Proto můžeme (2.14) upravit na tvar

$$x - y = -(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Platí tedy buď $x = y$ nebo $-1 = x^2 + xy + y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť platí

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x + y)^2 \geq 0.$$

První možnost $x = y$ spolu s (2.11) a (2.12) dává možná řešení

$$\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{\sqrt{2}}{3}\right], \qquad \left[-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{\sqrt{2}}{3}\right].$$

Dosazením do naší soustavy se přesvědčíme, že jde o řešení. □

STŘEDY OBLOUKŮ

Matěj Doležálek

Mnohé geometrické úlohy se zabývají vlastnostmi některých význačných bodů v geometrii trojúhelníka či tyto vlastnosti ve svých řešeních využívají. Patří mezi ně i úloha 71-A-I-5 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

V různostranném trojúhelníku ABC označme I střed vepsané kružnice a k kružnici opsanou. Polopřímky BI a CI protnou kružnici k po řadě v bodech $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokažte, že tečna ke kružnici k v bodě A, přímka vedená bodem I rovnoběžně se stranou BC a přímka S_bS_c se protínají v jednom bodě.

Tento příspěvek se pokusí přiblížit jednu skupinu takovýchto význačných bodů: středy oblouků vytnutých vrcholy trojúhelníku na jeho kružnici opsané. Jak uvidíme, každý z těchto středů leží zároveň na kružnici opsané, ose strany, ale i ose úhlu. Toto je dává do užitečných vztahů mj. se středy kružnice vepsané a kružnic připsaných, ale zároveň umožňuje přenášení úhlů na kružnici opsané.

1 Základní nástroje

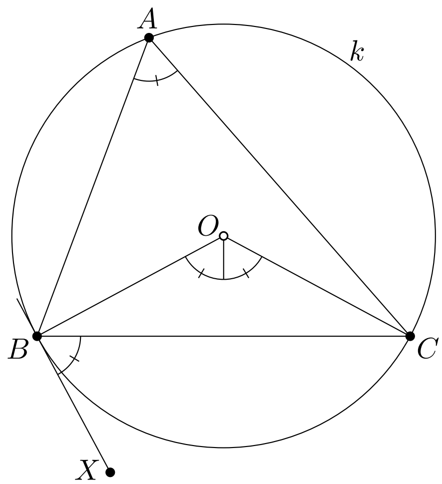
Shrňme stručně základní poznatky o úhlech na kružnici a tětivových čtyřúhelnících, které budeme používat.

Věta 1.1 (o středovém, obvodovém a úsekovém úhlu)**.** *Mějme tětivu BC na kružnici k se středem O. Dále nechť bod A leží na k a bod X nechť je zvolen v opačné polorovině vůči BC než A tak, že BX je tečna ke kružnici k. Potom platí*

$$|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle XBC|,$$

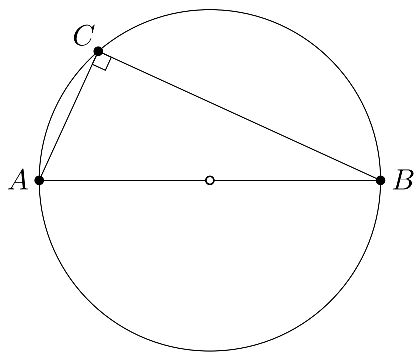
přičemž však úhlem BOC myslíme vždy ten, který neobsahuje A (může být i nekonvexní).

Úhly BAC, BOC a XBC nazýváme po řadě *obvodový*, *středový* a *úsekový* úhel odpovídající oblouku BC.



Speciálním případem věty o středovém a obvodovém úhlu je Thalétova věta.

Věta 1.2 (Thalétova)**.** *Úhel BCA je pravý, právě když C leží na kružnici nad průměrem AB.*



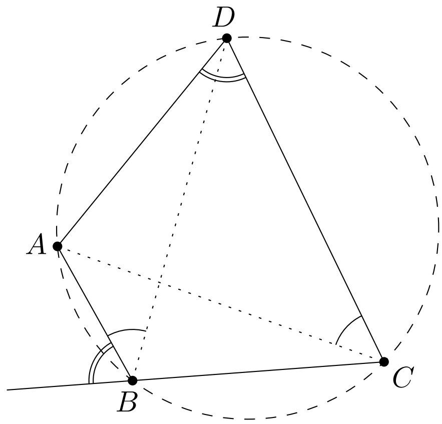
Definice 1.3. Čtyřúhelník $ABCD$ nazýváme *tětivový*, pokud mu lze opsat kružnici.

Věta 1.4. *Následující tvrzení jsou navzájem ekvivalentní:*

(1) $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník.

(2) Body B, C leží v téže polorovině vzhledem k přímce AD a platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$.

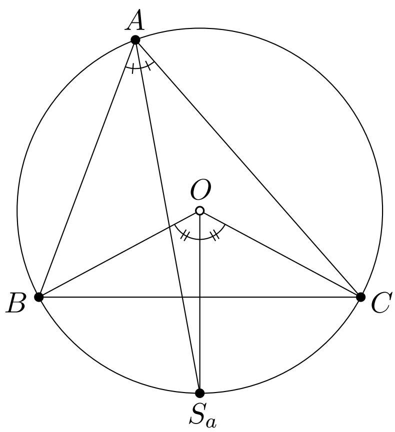
(3) Body B, D leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce AC a platí $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$.



2 Vlastnosti středů oblouků

V následujícím budeme uvažovat trojúhelník ABC s kružnicí opsanou k se středem O. Označme jako S_a průsečík toho oblouku BC na kružnici k, který neobsahuje bod A, s osou strany BC. Jedná se tedy o střed oblouku „naproti A“. Analogicky definujeme body S_b, S_c. Základní užitečnou vlastností bodu S_a je, že kromě kružnice opsané a osy strany BC leží také na ose úhlu BAC.

Lémma 2.1. *Přímka AS_a je osou úhlu BAC.*

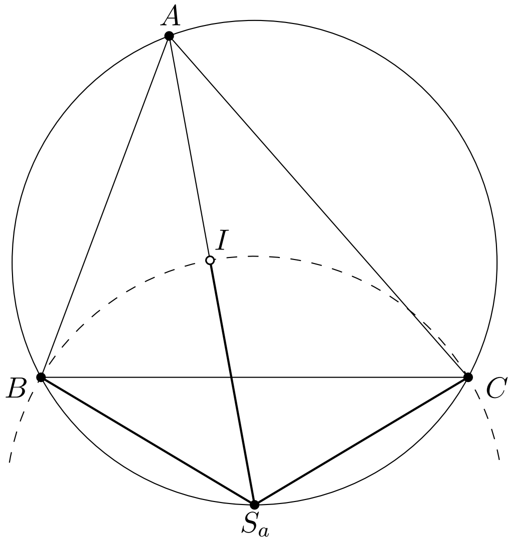


Důkaz. Střed O kružnice opsané leží na ose strany BC. V souměrnosti podle této osy tak zůstávají O i S_a na místě, zatímco B se zobrazuje na C. Jistě tedy bude platit $|\sphericalangle BOS_a| = |\sphericalangle S_aOC|$. Z věty o středovém a obvodovém úhlu pak z tohoto plyne také

$$|\sphericalangle BAS_a| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOS_a| = \frac{1}{2}|\sphericalangle S_aOC| = |\sphericalangle S_aAC|,$$

což znamená, že AS_a je osou úhlu BAC. $\square$

Lémma 2.2 (o trojzubci)**.** *Nechť je I střed kružnice vepsané v trojúhelníku ABC. Potom je S_a středem kružnice opsané trojúhelníku BIC.*



Důkaz. Chceme dokázat $|S_aB| = |S_aI| = |S_aC|$, tedy že trojúhelníky BIS_a a CIS_a jsou rovnoramenné. Z polovičních úhlů vytnutých osami úhlů spočteme

$$|\sphericalangle BIS_a| = 180^\circ - |\sphericalangle BIA| = |\sphericalangle BAI| + |\sphericalangle ABI| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2},$$

zatímco s pomocí obvodového úhlu na kružnici opsané ABC máme

$$|\sphericalangle IBS_a| = |\sphericalangle IBC| + |\sphericalangle CBS_a| = |\sphericalangle IBC| + |\sphericalangle CAS_a| = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

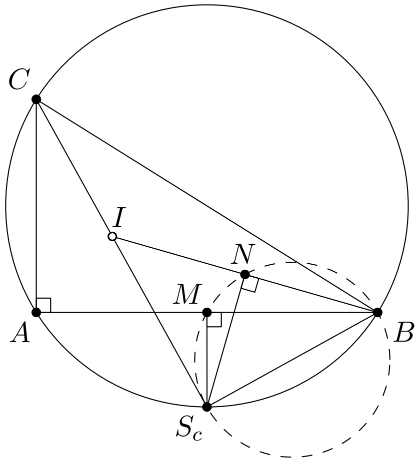
Odvodili jsme tedy $|\sphericalangle BIS_a| = |\sphericalangle IBS_a|$, takže $|S_aB| = |S_aI|$. Obdobně se odvodí $|S_aI| = |S_aC|$. □

Cvičení 2.3. *Označme I_a střed kružnice A-připsané, který je průsečíkem os vnějších úhlů u vrcholů B, C. Potom na kružnici opsané trojúhelníku BIC leží i I_a, navíc je úsečka I_aI průměrem této kružnice.*

3 Úlohy

Úloha 3.1. *Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.* *(70-A-III-2)*

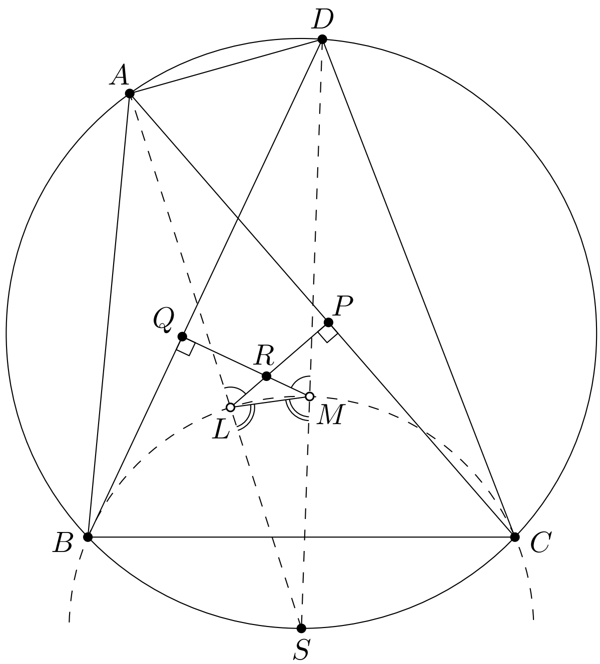
Řešení. Ukážeme, že S_c je bodem dotyku přímky CI a kružnice opsané BMN. Nejprve dokážeme, že vůbec S_c leží na této kružnici. Podle lémmatu o trojzubci je S_c středem kružnice opsané ABI, tudíž leží na osách tětiv BA, BI. Body M, N jsou středy těchto tětiv, takže oba úhly $\sphericalangle BNS_c$, $\sphericalangle BMS_c$ jsou pravé. To už znamená, že body B, N, M, S_c leží na jedné kružnici nad průměrem BS_c.



Víme, že body C, I a S_c leží na jedné přímce (ose vnitřního úhlu u C), takže zbývá ověřit, že S_cC je tečnou ke kružnici nad průměrem BS_c. Díky pravému úhlu při A však máme $|\sphericalangle BS_cC| = |\sphericalangle BAC| = 90°$. Přímka S_cC je tedy kolmicí na průměr BS_c kružnice opsané BMN, tudíž je její tečnou. □

Úloha 3.2. *V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný.* *(56-A-III-2)*

Řešení. Označme S střed toho oblouku BC na kružnici opsané čtyřúhelníku $ABCD$, který neobsahuje body A, D. Trojúhelníky ABC a DBC sdílejí opsanou kružnici, takže S je bodem S_a vzhledem k trojúhelníku ABC a stejně tak bodem S_d vzhledem k trojúhelníku DBC. Bodem S tak procházejí osy $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BDC$. Podle lémmatu o trojzubci jsou nyní obě délky $|SL|$, $|SM|$ shodné s $|SB| = |SC|$. Body B, L, M, C tak leží na jedné kružnici (se středem v S) a speciálně je trojúhelník SLM rovnoramenný s $|\sphericalangle MLS| = |\sphericalangle LMS|$.



Dále označme patu kolmice vedené z L na AC jako P a patu kolmice z M na BD jako Q (jedná se o body dotyku příslušných vepsaných kružnic). Z obvodových úhlů odpovídajících oblouku BSC máme $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$, což dává i rovnost polovičních úhlů $|\sphericalangle LAP| = |\sphericalangle MDQ|$. Poté už z toho, že trojúhelníky ALP a DMQ jsou pravoúhlé, odvodíme i

$$|\sphericalangle ALP| = 90° - |\sphericalangle LAP| = 90° - |\sphericalangle MDQ| = |\sphericalangle DMQ|.$$

Nyní tedy máme u L a M dvojice shodných úhlů $|\sphericalangle MLS| = |\sphericalangle LMS|$ a $|\sphericalangle ALP| = |\sphericalangle DMQ|$. Pokud tedy tyto úhly odečteme od přímých úhlů $|\sphericalangle SLA| = |\sphericalangle SMD| = 180°$, obdržíme také $|\sphericalangle MLR| = |\sphericalangle LMR|$. Trojúhelník LMR je tak rovnoramenný. □

3.1 K procvičení

Úloha 3.3. *Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Středy těch oblouků AB, BC, CD, DA na jeho opsané kružnici, které neobsahují žádný další vrchol, označme S_1, S_2, S_3, S_4. Dokažte, že přímky S_1S_3 a S_2S_4 jsou na sebe kolmé.*

Úloha 3.4. *Nechť se kružnice vepsaná a A-připsaná trojúhelníku ABC dotýkají strany BC po řadě v bodech D a E. Dále budiž M střed strany BC. Dokažte, že pak je M i středem DE.*

Návod. Jedná se o kolmé průměty bodů I, I_a a S_a na přímku BC. □

Úloha 3.5. *Je dán různostranný trojúhelník ABC. Bod K je zvolen na straně AC tak, že BK je osa úhlu ABC, obdobně L leží na BC a přímka AL je osa úhlu BAC. Osa úsečky BK protíná přímku AL v bodě M a bod N je zvolen na přímce BK tak, že $LN \parallel MK$. Dokažte, že $|AN| = |LN|$.*

Návod. M je střed kratšího oblouku BK na kružnici opsané ABK. □

Literatura

[1] D. Hruška, R. Švarc: *Geometrie trojúhelníka.* Seriál Matematického korespondenčního semináře, 36. ročník. Dostupné z: `https://prase.cz/archive/36/serial.pdf`.

[2] Š. Šimsa: *Švrčkův bod.* Sborník Matematického korespondenčního semináře, Staré Město 2015. Dostupné z: `https://prase.cz/library/SvrckuvBodSS/SvrckuvBodSS.pdf`

[3] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

CYKLY A DĚLITELNOST

Filip Čermák

Úlohy s posloupnostmi či s opakovanou aplikací jedné funkce se v matematické olympiádě vyskytují velmi často, dokonce i v těch nejvyšších kolech. Většinou se po nás chce prošetřit nějakou vlastnost takovéto posloupnosti nebo funkce – například zdali má posloupnost nekonečně mnoho prvočísel či kolik má daná funkce kořenů. Pokud chceme ověřit vlastnost posloupnosti či funkce, je velmi přirozené nakreslit si graf reprezentující tuto funkci či posloupnost. Pokud se dokonce bavíme o posloupnostech či funkcích na konečných množinách, je tento graf také konečný a dá se z něj vyčíst spousta věcí. Příkladem úlohy s touto tématikou je i 71-A-I-6 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Uvažujme nekonečnou posloupnost a_0, a_1, a_2, … *celých čísel, která splňuje podmínky* $a_0 \geq 2$ *a* $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ *pro všechny indexy* $n \geq 0$. *Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.*

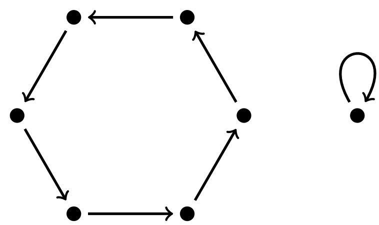
1 Grafy

Definice 1.1. *Grafem* budeme rozumět uspořádanou dvojici množiny vrcholů a množiny hran, kde *vrchol* bude v našem případě číslo a *hrany* budou uspořádané dvojice vrcholů (u, v).

Přestože jsme si graf definovali dost formálně jako množinu hran a množinu vrcholů, čtenář nemusí mít strach. Definice je zde proto, abychom měli nějaký formální základ. My si však vždy budeme představovat vrcholy jako tečky na papíře (případně tečky označené přirozenými čísly) a hrany jako šipky směřující z jednoho vrcholu do druhého.

Již v úvodním textu jsme zmínili, že nás zajímají reprezentace posloupností a funkcí pomocí grafů. Proto bychom si prvně mohli uvést, co taková funkce je. Připomeňme, že funkce se od zobrazení liší pouze tím, že její hodnoty jsou čísla, tj. obor hodnot je množinou nějakých čísel.

Definice 1.2. *Funkcí* f *na množině* M rozumíme takové zobrazení $f : M \to M$, které každému x z množiny M přiřazuje právě jedno číslo $f(x)$ z M.



Nyní nám už jen zbývá krok od funkce k posloupnosti, ten je však velmi snadný. Posloupnost vytvořená danou funkcí f pro nás bude $a_{n+1} = f(a_n)$.

V teorii grafů jsou pro nás vrcholy libovolné objekty. Naše definice vrcholu však říká, že jde o čísla, a to hlavně proto, abychom mohli na vrcholy aplikovat funkce, které jsou definované pouze na číslech. Poté už můžeme jednoduše sestavit graf, když máme danou funkci a množinu M, na které je tato funkce definovaná.

Mějme funkci $f : M \to M$. Pak vrcholy našeho grafu jsou prvky množiny M. Říkáme, že orientovaná hrana *vede z a do b* právě tehdy, když $f(a) = b$. V teorii grafů máme spoustu termínů, které bychom na daných grafech mohli zkoumat. My si však v našem textu vystačíme pouze s pojmem *cyklus*.

Definice 1.3. *Cyklem* nazýváme konečnou posloupnost vrcholů, mezi nimiž vedou „dokola“ hrany. Neboli jde o posloupnost vrcholů, kde jsou dva po sobě jdoucí vrcholy spojeny hranou (ve správném směru) a první a poslední vrchol splývají. I samotný vrchol se smyčkou je cyklem.

Ještě než si zkusíme první příklady, řekněme si jejich princip. Úlohy které budeme potkávat, mají většinou společné to, že chceme najít cyklus. Ale ne jen tak ledajaký cyklus, ale takový, který nám začíná i končí v úplně prvním vrcholu. Takovýmto cyklům budeme říkat *hezké*. Abychom v grafu našli cyklus, musíme ověřit dvě podmínky:

- zdali má daný graf cyklus,
- zdali je to takový cyklus, který obsahuje počáteční vrchol.

První část v našich případech vyřešíme velmi snadno, a to pouze tím, že budeme mít konečný počet vrcholů, a jelikož po našem grafu budeme chodit do „nekonečna“, musíme se potom, jak plyne z Dirichletova principu, vrátit alespoň do jednoho vrcholu.

Druhá část už bývá o něco složitější. Jde nám o to, aby cyklus skončil tam, kde začal. Pokud bychom ukázali, že neexistuje vrchol, do kterého vedou dvě hrany, vyhráli bychom. Způsobů, kterými to jde dokázat, je vícero, ale v další části to zkusíme dělat jednoznačným průchodem i nazpět.

2 Cykly v pohádkách

Nyní jsme se bavili spíše o grafech než o funkcích. Ač se to může zdát na první pohled vzdálené, po přečtení tohoto příspěvku snad zjistíme, že je to jedno a totéž. Pojďme nyní setrvat v teorii grafů a hlavně se zaměřme na (hezké) cykly.

Úloha 2.1. *David na svých cestách zabloudil do země, kde je konečně mnoho silnic, každá z nich začíná a končí křižovatkou a každá křižovatka je tvaru Y. (Silnice mohou být klikaté a mimoúrovňově se křížit.) Řekl si, že by si zemi rád prohlédl, ale trochu se obával, aby se tam úplně neztratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí z křižovatky u hospody Na mýtince a střídavě bude na křižovatkách odbočovat doleva a doprava. Může si být jistý tím, že se po nějakém čase ocitne opět u hospody Na mýtince?*

Řešení. David se do hospody Na mýtince vždy vrátí.

Jelikož začínáme v hospodě Na mýtince, hodilo by se najít v nějakém grafu cyklus, kde bude prvním vrcholem hospoda Na mýtince. Úloha nám sama nabízí graf, kde jsou vrcholy křižovatky a hrany cesty. Po chvíli přemítání zjistíme, že to není asi úplně nejjednodušší způsob, jak zde najít hezký cyklus. Cyklus tam najdeme už jen proto, že množina vrcholů je konečná. Nicméně hlavním problémem je, že nám v tomto grafu mohou vést dvě hrany do stejného vrcholu, neboli že onen cyklus nemusí být hezký. Proto si chceme zvolit lepší reprezentaci, kde budeme umět chodit i „zpátky“.

Zkusíme se podívat na graf, v němž vrcholy budou trojice (s, d, p), kde s je silnice, po které David momentálně jde, d je směr, kterým po ní jde, a p udává paritu, kam odbočí na následující křižovatce (doleva či doprava). Tato trojice tedy popisuje stav, ve kterém se David nachází na silnici a jak bude přes křižovatku procházet dál. Hrany v tomto grafu budou vést mezi stavy, mezi kterými se dá přejít pomocí popisu v zadání.

Vidíme, že i zde je vrcholů konečně mnoho, jelikož počet vrcholů je právě počet cest krát počet směrů krát počet parit.

Proč je ale tato reprezentace lepší než ta původní? Pouhá informace o křižovatkách nám nedává možnost, jak zrekonstruovat krok zpět, protože dalších křižovatek kolem jednoho vrcholu může být libovolně mnoho. Proto je lepší si vrcholy převést na silnice, kde už potřebujeme jen doplnit směr a paritu další zatáčky.

Tímto způsobem určitě umí David chodit jednoznačně dopředu. Dozadu nicméně také, jelikož víme, jakým směrem přišel. To už nutně znamená, že stačí rozhodnout, jestli přišel zprava či zleva, ale tuto informaci už nám udává parita.

Doteď jsme trochu zamlčeli informaci o tom, co je náš počáteční stav. Můžeme si místo hospody Na mýtince představit, že jsme na cestě, která do ní vede, ve směru do ní s paritou doprava, jelikož dle zadání poprvé David zahne doleva.

A nyní už díky tomu, že umíme chodit jednoznačně i dozadu, umíme najít cyklus začínající v počátečním stavu. Kdyby nebyl hezký, neobsahuje počátek, existují tedy dvě hrany do stejného vrcholu, což je spor s chozením jednoznačně i pozpátku. Tudíž tento cyklus musí být i hezký.

Protože vrchol, do kterého se v hezkém cyklu vracíme, obsahuje i informaci o směru, jistě se někdy vyskytneme znovu na cestě před hospodou Na mýtince a půjdeme správným směrem k ní. □

3 Funkce a posloupnosti

Nyní už jsme se naučili hledat (hezké) cykly v grafu. Jediné, co se nám změní přidáním funkcí do zadání, je trocha terminologie.

Definice 3.1. Funkce f se nazývá *prostá*, pokud pro každé x a y splňující $f(x) = f(y)$ platí, že $x = y$. Funkce f se nazývá *na*, pokud pro každé y existuje takové x, že $f(x) = y$.

Pokud chceme chodit jednoznačně zpět v grafu definovaném funkcí (či posloupností), hodí se nám, když je funkce prostá. Je-li prostá, nemůže z definice nastat případ, kdy povedou dvě hrany do jednoho vrcholu, neboť by potom platilo $f(x) = f(y)$ pro různá x a y.

Úloha 3.2. *Nechť $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Funkci $f : S \to S$ budeme nazývat krutopřísnou, pokud pro každé $k \in S$ platí $f^{f(k)}(k) = k$.*[1] *Dokažte, že každá krutopřísná funkce má alespoň $P + 1$ pevných bodů*[2]*, kde P je počet prvočísel v intervalu $(\sqrt{n}, n)$.*

Řešení. Iterací funkce f nám vzniká graf popsaný po Definici 1.2. I zde nám vznikají cykly, jelikož z každého vrcholu vede právě jedna hrana a máme konečně mnoho vrcholů.

[1] $f^i(k) = f(f(\cdots f(k)\cdots))$, kde funkce f je aplikována i-krát, tj. například $f^1(k) = f(k)$, $f^2(k) = f(f(k))$, $f^3(k) = f(f(f(k))), \ldots$

[2] *Pevným bodem funkce f* nazýváme takový bod $x \in S$, pro nějž platí $f(x) = x$.

Nyní je chození dopředu v našem grafu jednoznačně definováno funkcí f. Jediné, co musíme vyřešit, je nalezení hezkého cyklu. Jak jsme řekli v úvodu této kapitoly, hodí se nám dokázat, že je funkce prostá. To si ale stačí připomenout podmínku krutopřísnosti ze zadání. Pokud $f(x) = f(y)$, pak aplikováním $f(x)$-krát funkce f na jedné straně a $f(y)$ na straně druhé dostáváme, že $x = f^{f(x)}(x) = f^{f(y)}(y) = y$. Prostotu funkce tedy máme a to už nutně znamená, že umíme chodit jednoznačně dozadu, tedy že máme hezký cyklus. Nyní už jsme zase zpátky v grafu. Máme zde jen hezké cykly a chtěli bychom říct, že tyto cykly jsou občas jednocykly, neboli smyčky, které jsou synonymem pro pevný bod.

Díky tomu, že je naše f prostá ze stejně velké do stejně velké množiny, víme, že je i na. Pojďme se podívat na libovolné k a $l = f(k)$. Víme, že k i l jsou na stejném hezkém cyklu. Víme, že po l iteracích této funkce se z k dostaneme zpět do k. Proto je délka tohoto hezkého cyklu dělitelem l. Nyní chceme najít $P + 1$ hezkých cyklů délky 1. První takový cyklus je triviální pro $l = 1$, kde je jediným dělitelem jedničky jednička samotná.

Zadání nám přímo nabízí uvažovat prvočísla v intervalu $(\sqrt{n}, n)$. Pokud si za l zvolíme takto velké prvočíslo p, je délka cyklu buďto p, nebo 1. Jediné, co zbývá, je vyloučit případ, kdy je délka cyklu p. Pokud je tedy na tomto cyklu právě p čísel, pak p dělí všechna čísla na cyklu. To znamená, že máme alespoň p násobků čísla p. To už však nutně znamená, že máme celkově alespoň $p^2 > n$ čísel, což je spor s velikostí p a s tím, že máme pouze čísla od 1 do n. Takže jsme našli dostatek pevných bodů.

Jako příklad krutopřísné funkce na $S = \{1, 2, 3, 4\}$ si uvedeme $f(1) = 1, f(2) = 4, f(4) = 2, f(3) = 3$. Vidíme, že pro splnění podmínky krutopřísnosti funkce obíhá cykly i několikrát. □

Stejně jako v původní úloze i zde propojujeme grafy s teorií čísel. Zkusíme to ještě jednou pomocí zbytků po dělení třemi.

Úloha 3.3. *Pro dané celé číslo $a_0 > 1$ definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pro každé $n \geq 0$ předpisem*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, \textit{pokud je } \sqrt{a_n} \textit{ celé číslo,} \\ a_n + 3, \textit{jinak.} \end{cases}$$

Určete všechny hodnoty a_0, pro něž existuje číslo A takové, že $a_n = A$ platí pro nekonečně mnoho indexů n.

Řešení. Vidíme, že se zde vyskytuje odmocnění, které nám číslo výrazně zmenší. Proto je dobrý nápad podívat se na nejmenší prvek, který se v posloupnosti vyskytuje. Mějme tedy nejmenší prvek m dané posloupnosti. Z podmínky ze zadaní je jasné, že $m \neq 1$ a také z minimality není m čtyři. Předpokládejme, že m nemá zbytek 2 po dělení třemi. Jelikož m nemůže být z minimality druhá mocnina, nejmenší druhá mocnina větší než m, kterou dostaneme při postupném přičítání trojky, je $(\lfloor\sqrt{m}\rfloor+1)^2$, $(\lfloor\sqrt{m}\rfloor+2)^2$ nebo $(\lfloor\sqrt{m}\rfloor+3)^2$. Z minimality m už potom dostáváme, že $m \leq \lfloor\sqrt{m}\rfloor + 3$ neboli, že $m \leq 5$. Jelikož m není jedna ani čtyři a zároveň nechceme m dávající zbytek 2 po dělení 3, musí už nutně platit, že $m = 3$. Nyní tedy víme, že buď má minimální prvek zbytek dva po dělení třemi, nebo je minimálním prvek tři.

Druhý případ je jednoduchý. Pokud máme nějaký prvek a_n dělitelný třemi, potom nám posloupnost zachovává vlastnost, že je i a_{n+1} dělitelné třemi. Pak z předchozího odstavce víme, že $m = 3$, a tudíž se dostaneme do našeho kýženého cyklu $3 \to 6 \to 9 \to 3$. Proto A může být 3, 6, či 9.

První případ je vlastně taky jednoduchý, protože se jistě někdy dostaneme na minimum m, které má zbytek 2 po dělení 3. Jakmile se však dostaneme v této posloupnosti na m, nikdy se už neaplikuje odmocnění, protože po rozebrání kvadratických zbytků po dělení třemi si můžeme uvědomit, že žádné číslo se zbytkem dva po dělení třemi není druhou mocninou přirozeného čísla.

Jasně vidíme, že druhá operace zachovává zbytek po dělení třemi, a posloupnost nám tedy bude už jenom růst. Z toho už víme, že pro taková m zadání nesplníme. $\square$

4 Cvičení na doma

Úloha 4.1. *Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice (vždy existuje alespoň jedna) jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. Centrem nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Dokažte, že město má centrum.*

Úloha 4.2. *Definujme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ takto: $a_1 = 1$ a pro každé přirozené k je $a_{k+1} = a_k^3 + 1$. Dokažte, že pro všechna prvočísla p tvaru $3l + 2$, kde l je celé nezáporné, existuje přirozené n, že $p \mid a_n$.*

Literatura

[It] M. Doležálek: *Iterace – iKS sborník 2021.*
`https://iksko.org/files/sbornik10.pdf`

Kategorie

B

PÝTHAGOREJSKÉ TROJÚHELNÍKY A JINÉ ÚLOHY

Antonín Slavík

Úloha 71-B-I-1 matematické olympiády je pěknou ukázkou problému, kdy se za otázkou z geometrie skrývá algebraická úloha:

Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. *Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.*

Hledání pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran fascinovalo matematiky již ve starověku (viz např. [Be], [Ma]); jedná se o tzv. pýthagorejské trojúhelníky.

1 Pýthagorejské trojice

Označíme-li délky odvěsen pýthagorejského trojúhelníku písmeny a, b a délku přepony písmenem c, pak platí $a^2 + b^2 = c^2$. Trojice přirozených čísel (a, b, c) s touto vlastností se nazývají pýthagorejské, přičemž nejznámějším příkladem je $(3, 4, 5)$. Z každé pýthagorejské trojice (a, b, c) lze získat nekonečně mnoho dalších trojic ve tvaru $(k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c)$, kde $k \in \mathbb{N}$. Takové trojice ovšem nejsou zvlášť zajímavé a k nalezení všech pýthagorejských trojic stačí zkoumat případy, kdy čísla a, b, c jsou nesoudělná, tj. nemají společného dělitele většího než 1. Tyto pýthagorejské trojice se nazývají primitivní a na hledání takové trojice vede úloha 71-B-I-1.

Je zřejmé, že v žádné primitivní pýthagorejské trojici nemohou být obě čísla a, b sudá. Nemohou však být ani obě lichá, jinak by číslo na pravé straně rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$ bylo dělitelné 4, zatímco levá strana by při dělení 4 dávala zbytek 2. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že a je sudé a b je liché. Číslo $c^2 = a^2 + b^2$ je pak liché, tudíž i c je liché a obvod pravoúhlého trojúhelníka $a + b + c$ je sudé číslo, což je v souladu se zadáním úlohy, kde máme požadavek $a + b + c = 11\,990$.

Označíme-li $a = 2t$, dostáváme podmínku

$$(2t)^2 + b^2 = c^2,$$

neboli po úpravě

$$t^2 = \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2}.$$

Na pravé straně máme součin dvou přirozených čísel, která jsou nesoudělná (ověření tohoto faktu přenecháváme čtenáři). S ohledem na tvar levé strany se tedy musí jednat o druhé mocniny jistých přirozených čísel m, n:

$$\frac{c+b}{2} = m^2, \quad \frac{c-b}{2} = n^2.$$

Z předchozích rovností plynou vztahy

$$c = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad a = 2mn, \tag{1.1}$$

které byly známy již ve starověku. Ukázali jsme, že každou primitivní pýthagorejskou trojici lze vyjádřit v tomto tvaru.

Obráceně, pokud za m, n dosadíme libovolná přirozená čísla splňující $m > n$, je snadné ověřit, že takto získané hodnoty a, b, c skutečně splňují $a^2 + b^2 = c^2$ (nemusí se ovšem nutně jednat o primitivní pýthagorejskou trojici).

Vztahy (1.1) představují jednu možnou, nikoliv však nejkratší cestu k řešení soutěžní úlohy. Je zajímavé, že i bez informace o tom, že jedna z odvěsen má prvočíselnou délku, je hledaný pýthagorejský trojúhelník určen jednoznačně. Informace o prvočíselnosti se však při hledání řešení dá s výhodou využít.

K problematice pýthagorejských trojic a trojúhelníků existuje velké množství zdrojů. Výše uvedené úvahy vedoucí ke vztahům (1.1) lze najít např. v [Ma]. Další zajímavé informace jsou uvedeny v [Ře], [Sl], [Wi1].

2 Další úlohy

Podívejme se na některé další úlohy týkající se obrazců s celočíselnými délkami stran.

Úloha 2.1. [3] *Popište všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž obvod má stejnou hodnotu jako obsah.*

Řešení. Použijeme obvyklé značení, kdy a, b jsou délky odvěsen a c je délka přepony. Platí tedy

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leq b$. Aby měly obvod a obsah stejnou hodnotu, musí platit

$$\frac{1}{2}ab = a + b + c.$$

[3] Úloha je převzata z [KVW], problém 95.

Kombinací předchozích dvou rovností a postupnými úpravami získáváme:

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= \left(\frac{1}{2}ab - a - b\right)^2 \\
a^2 + b^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a^2 + 2ab + b^2 \\
0 &= \frac{1}{4}a^2b^2 - a^2b - ab^2 + 2ab \\
0 &= ab - 4a - 4b + 8 \\
8 &= (a-4)(b-4)
\end{aligned}
$$

Na pravé straně je součin dvou celých čísel, která jsou děliteli 8. Jde tedy o čísla z množiny $\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, \}$. S ohledem na předpoklad $a \le b$ připadají v úvahu následující možnosti:

- $a - 4 = 1$, $b - 4 = 8$, tj. $a = 5$, $b = 12$. Pak $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
- $a - 4 = 2$, $b - 4 = 4$, tj. $a = 6$, $b = 8$. Pak $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
- $a - 4 = -8$, $b - 4 = -1$, tj. $a = -4$, $b = 3$, což nevyhovuje zadání, protože a musí být kladné.
- $a - 4 = -4$, $b - 4 = -2$, tj. $a = 0$, $b = 2$, což nevyhovuje zadání, protože a musí být kladné.

Úloha má právě dvě řešení, pravoúhlé trojúhelníky o stranách délek 5, 12, 13, resp. 6, 8, 10. □

Následující jednodušší variantu úlohy 2.1, kde místo troúhelníků uvažujeme obdélníky, přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Cvičení 2.2. *Popište všechny obdélníky s celočíselnými délkami stran, jejichž obvod má stejnou hodnotu jako obsah.*

Pracnější je následující varianta úlohy, kdy se z roviny přesouváme do prostoru.

Úloha 2.3. [4] *Popište všechny kvádry s celočíselnými délkami stran, jejichž objem má stejnou hodnotu jako povrch.*

Řešení. Nechť strany kvádru mají délky $a, b, c \in \mathbb{N}$; bez újmy na obecnosti lze předpokládat $a \le b \le c$. Zajímá nás, kdy platí

$$abc = 2ab + 2ac + 2bc.$$

[4] Úloha i předchozí cvičení jsou převzaty ze [Si], problém 66.

Vidíme, že $abc > 2bc$, tedy $a > 2$. Dále můžeme psát

$$abc = \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3}.$$

Kdyby platilo $c < 6$, pak také $a, b < 6$, a dostali bychom

$$abc < 2ab + 2ac + 2bc,$$

což je spor. Vidíme tedy, že $c \geq 6$. Kdyby platilo $a > 6$, pak také $b, c > 6$, a dostali bychom

$$abc > 2ab + 2ac + 2bc,$$

což je spor. Vidíme tedy, že $a \in \{3, 4, 5, 6\}$. Dále pokračujeme rozborem těchto čtyř případů. Pokud $a = 3$, pak řešíme následující rovnici:

$$\begin{aligned} 3bc &= 6b + 6c + 2bc \\ bc - 6b - 6c &= 0 \\ (b-6)(c-6) &= 36 \end{aligned}$$

Protože $b \leq c$ a $c \geq 6$, musí být na levé straně součin dvou přirozených čísel, kde první činitel nepřevyšuje druhý. Je celkem 5 možností, jak tímto způsobem vyjádřit číslo 36:

$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$$

Dostáváme tak následující trojice (a, b, c):

$$(3, 7, 42),\ (3, 8, 24),\ (3, 9, 18),\ (3, 10, 15),\ (3, 12, 12)$$

Podobným způsobem se rozeberou případy $a \in \{4, 5, 6\}$; tento úkol již přenecháme čtenáři a prozradíme jen, že úloha má celkem 10 řešení. □

3 Hérónovské trojúhelníky

Kromě pýthagorejských trojúhelníků existuje další zajímavý typ trojúhelníků, tzv. hérónovské trojúhelníky. Jedná se o trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž obsah je rovněž celočíselný. Každý pýthagorejský trojúhelník je zřejmě hérónovský, neboť jeho obsah je $ab/2$ a víme, že jedno z čísel a, b je sudé.

Příkladem hérónovského trojúhelníku, který není pýthagorejský, je rovnoramenný trojúhelník se stranami o délkách 5, 5, 6; jeho obsah je podle Hérónova vzorce roven

$$\sqrt{8 \cdot (8-5) \cdot (8-5) \cdot (8-6)} = 12.$$

Ze dvou pýthagorejských trojúhelníků, které mají shodnou odvěsnu o délce a a jsou popsány trojicemi (a, b_1, c_1) a (a, b_2, c_2), lze složit hérónovský trojúhelník: Shodné odvěsny přiložíme k sobě tak, abychom dostali trojúhelník o stranách $(c_1, c_2, b_1 + b_2)$. Jeho obsah je součtem obsahů výchozích trojúhelníků, tj.

$$\frac{1}{2}ab_1 + \frac{1}{2}ab_2 = \frac{1}{2}a(b_1 + b_2).$$

To je celé číslo, neboť víme, že buď a je sudé, nebo b_1 a b_2 jsou sudá.

Popsaným způsobem vznikne např. výše zmíněný trojúhelník $(5, 5, 6)$ ze dvou pýthagorejských trojúhelníků $(4, 3, 5)$. Naopak hérónovský trojúhelník $(5, 29, 30)$ nelze získat složením dvou pýthagorejských trojúhelníků, neboť ani jedna z jeho výšek není celočíselná.

Hérónovské trojúhelníky mají celou řadu pozoruhodných vlastností. Jedna z nich, jejíž důkaz přenecháváme čtenáři jako cvičení, snadno plyne z Hérónova vzorce.

Cvičení 3.1. *Dokažte, že obvod každého héronovského trojúhelníku je sudé číslo.*

Další vlastnosti hérónovských trojúhelníků včetně jejich vztahu k pýthagorejským trojúhelníkům jsou popsány např. v [Do], [Sl], [Wi2].

Literatura

[Be] J. Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky.* In: J. Bečvář, E. Fuchs (eds.): *Historie matematiky I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, srpen 1993*, JČMF, 1994, 20–107. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400590`.

[Do] A. Dohnalová: *Heronovské trojúhelníky.* Diplomová práce, Pedagogická fakulta JU, 2010. Dostupné z: `http://tinyurl.com/kb5ux5c6`.

[KVW] J. D. E. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon: *Which way did the bicycle go? ... and other intriguing mathematical mysteries.* The Mathematical Association of America, 1996.

[Ma] E. Maor: *The Pythagorean Theorem. A 4000-Year History.* Princeton University Press, 2007.

[Ře] J. Řeháček: *Matykání: jak si nabrnkat pythagorejské trojice.* `https://janrehacek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=603423`.

[Si] D. Singmaster: *Problems for metagrobologists. A collection of puzzles with real mathematical, logical or scientific content.* World Scientific, 2016.

[Sl] M. Sláma: *Pythagorejské trojúhelníky*. Bakalářská práce, Pedagogická fakulta UK, 2015. Dostupné z: `http://tinyurl.com/ey3hm9wc`.

[Wi1] *Wikipedia: Pythagorean triple.* Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple`.

[Wi2] *Wikipedia: Heronian triangle.* Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle`.

SHODNÉ ÚSEČKY, ÚHLY A KRUŽNICE

Šárka Gergelitsová

Úlohy, v nichž dokazujeme shodnost úseček (ať už jako mezivýsledek nebo jako požadované tvrzení) potkáme v Matematické olympiádě často. V minulém (70.) ročníku matematické olympiády bylo takových úloh několik. Shodnost úseček budeme dokazovat také v úloze 71-B-I-2 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.

Při důkazech využíváme často shodnosti trojúhelníků a tětiv shodných kružnic a potřebujeme také vztahy mezi obvodovými a středovými (případně úsekovými) úhly.

1 Souměrnosti, shodné trojúhelníky

Dokazujeme-li shodnost dvou úseček, můžeme využít souměrností či jiných shodných zobrazení, jako například v úloze 70-B-S-2 či v úloze 70-A-I-2, kde využijeme navíc vlastnosti os stran a výšek trojúhelníku. Plná znění autorských řešení úloh najdeme na webu MO, zde řešení jen naznačíme:

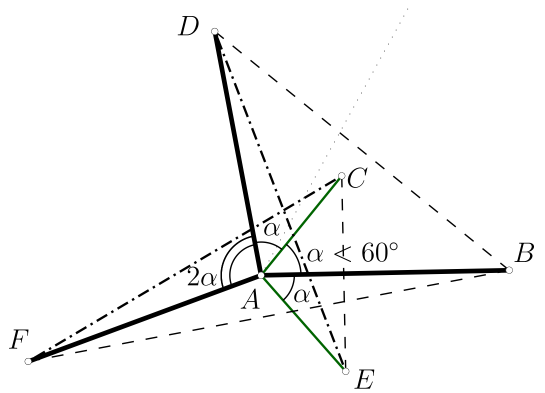
Úloha 1.1. [70-B-S-2] *Uvažujme trojúhelník ABC, ve kterém je $|\sphericalangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky AC označme D, obraz C podle AB označme E a obraz B podle AD označme F. Dokažte, že $|CF| = |DE|$.*

Řešení. Ze souměrnosti podle osy AC plyne jednak shodnost úseček AB, AD, jednak shodnost úhlů BAC, CAD, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD| = \alpha$.

Ze souměrnosti podle osy AD plyne jednak shodnost úseček AF, AB, jednak shodnost úhlů BAD, DAF, tudíž $|AF| = |AD|$ a $|\sphericalangle DAF| = 2\alpha$.

Ze souměrnosti podle osy AB plyne jednak shodnost úseček AC, AE, jednak shodnost úhlů: $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$.

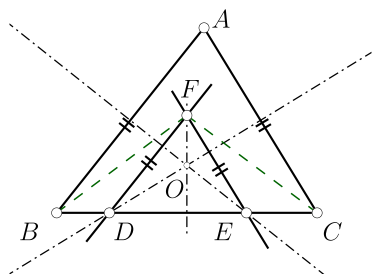
Trojúhelníky CAF a EAD jsou proto shodné, s konvexním úhlem velikosti 3α ($\alpha < 60°$) při společném vrcholu A. $\square$



Obr. 1: Úhly a délky v úloze 70-B-S-2

Úloha 1.2. [70-A-I-2] *V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží na straně BC body D a E tak, že D je mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je takový bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokažte, že $|FB| = |FC|$.*

Řešení. Využijeme skutečnosti, že vzhledem k rovnoběžnosti úseček FD, AB je osa úsečky AB, která prochází vrcholem E rovnoramenného trojúhelníku AEB, zároveň výškou na stranu DF trojúhelníku DFE. Podobně je osa úsečky AC výškou na jeho stranu EF. Střed kružnice opsané trojúhelníku ABC je ortocentrem trojúhelníku EFD a bod F leží na výšce ke straně ED, která je zároveň osou strany BC. Proto $|FB| = |FC|$. □



Obr. 2: Řešení úlohy 70-A-I-2

Úlohy zadané v kategorii C pomohou připomenout další vlastnosti trojúhelníků: řešení úlohy 70-C-I-5 využívá vlastnosti těžnic a příček trojúhelníku rovnoběžných s jeho stranou a v úloze 70-C-S-2 využijeme shodnosti pravoúhlých trojúhelníků oddělených od rovnoběžníku kolmicemi k jedné dvojici rovnoběžných stran. Znění úloh i celé řešení je k nalezení na webu MO.

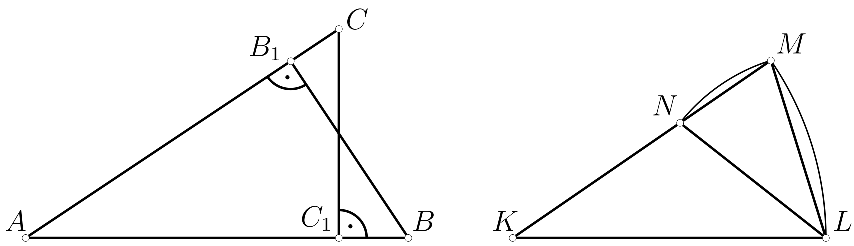
2 Úhly v trojúhelnících a kružnicích

Shodnost úseček se nám v některých úlohách podaří dokázat pomocí znalosti vlastností úhlů v kružnicích. Patří mezi ně i úlohy z domácího a krajského kola loňského ročníku MO kategorie B, jejichž stručné řešení ukážeme. Dříve si ale připomeňme dvě snadná tvrzení o podobnosti trojúhelníků se společným úhlem:

Tvrzení 2.1. *Pravoúhlé trojúhelníky se společným úhlem při přeponě jsou podobné.*

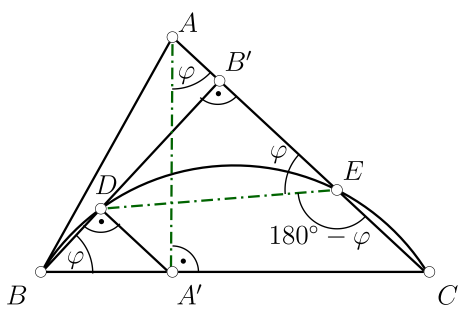
Tvrzení 2.2. *Rovnoramenné trojúhelníky se společným úhlem při základně jsou podobné. (V případě společného úhlu při hlavním vrcholu jsou podobné a navíc stejnolehlé.)*

Na obrázku 3 jsou podobné pravoúhlé trojúhelníky ABB_1 a ACC_1, které mají společný úhel při vrcholu A, a rovnoramenné trojúhelníky KLM, LMN se společným úhlem při základně při vrcholu M.



Obr. 3: Podobné trojúhelníky se společným úhlem

Úloha 2.3. [70-B-I-3] *V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$.*



Obr. 4: Úloha 70-B-I-3

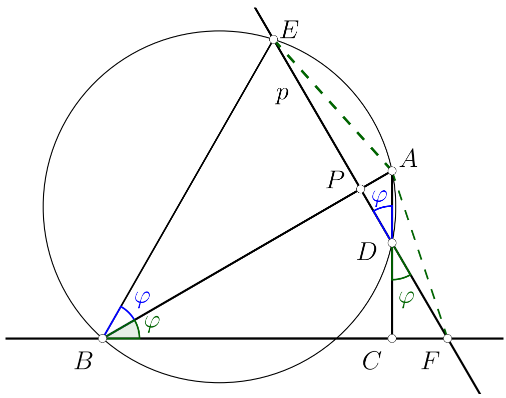
Řešení. Protože úsečky AE, $A'D$ jsou kolmé na výšku BB', je $AEA'D$ lichoběžník.

Pravoúhlé trojúhelníky $AA'C$, $BB'C$ jsou podobné – mají společný vnitřní úhel při vrcholu C.

Protože body B, D, E, C leží – v tomto pořadí – na jedné kružnici, je $|\sphericalangle CBD| = 180° - |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle DEA|$.

Proto $|\sphericalangle EAA'| = |\sphericalangle CBB'| = |\sphericalangle DEA|$. Úhlopříčky $|AA'|$, $|DE|$ lichoběžníku $AEA'D$ svírají se základnou shodné úhly, jsou tedy shodné. □

Úloha 2.4. [70-B-II-3] *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$.*



Obr. 5: Úloha 70-B-II-3

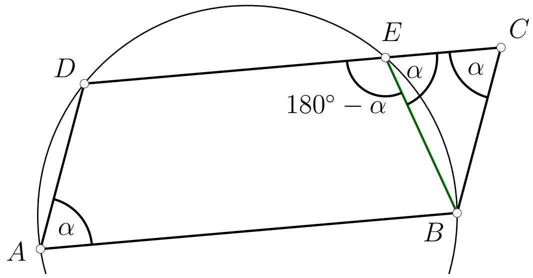
Řešení. Označme P průsečík přímek p a BA. Podobně jako v předchozí úloze využijeme toho, že pravoúhlé trojúhelníky ABC, APD mají společný vnitřní úhel při vrcholu A, tudíž jsou podobné.

Protože body D, B leží na tomtéž oblouku nad tětivou AE (tětivy AB, ED se protínají), jsou úhly ABE, ADE shodné.

Odtud plyne, že AB je osa úhlu EBF kolmá na úsečku FE, trojúhelník FBE je tedy rovnoramenný se základnou FE a $AFBE$ je deltoid. □

Podívejme se na další inspirativní úlohy, na začátek dvě velmi snadné.

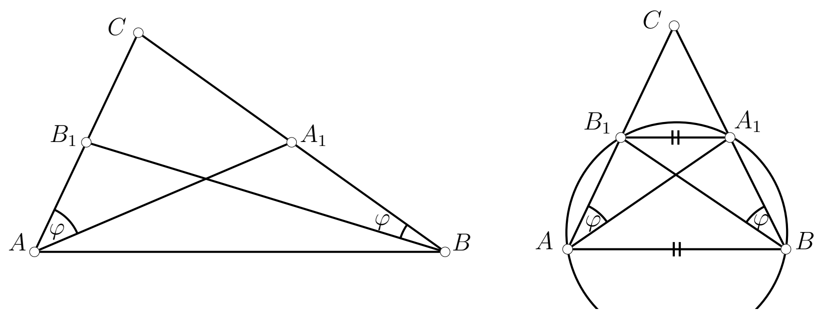
Úloha 2.5. *Je dán rovnoběžník $ABCD$ s ostrým vnitřním úhlem při vrcholu A a delší stranou AB. Sestrojme kružnici opsanou trojúhelníku ABD a její průsečík E se stranou CD. Potom je $ABED$ rovnoramenný lichoběžník a EBC rovnoramenný trojúhelník.*



Obr. 6: Rovnoběžník a kružnice

Řešení. Součet velikostí protilehlých vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je 180°. Proto je vnitřní úhel při vrcholu E v trojúhelníku EBC shodný s úhlem DAB a tedy i s úhlem BCE. Lichoběžník je tětivový právě tehdy, je-li rovnoramenný. □

Úloha 2.6. *Sestrojme těžnice AA_1, BB_1 trojúhelníku ABC. Dokažte, že jestliže platí $|\sphericalangle CAA_1| = |\sphericalangle CBB_1|$, je trojúhelník rovnoramenný.*

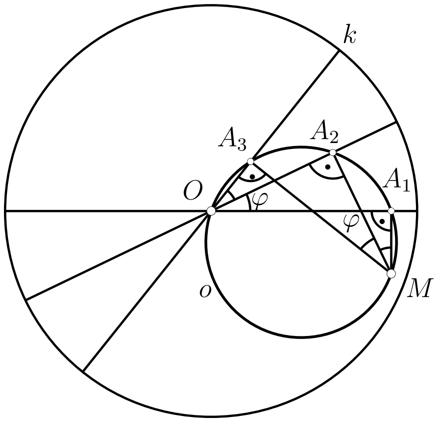


Obr. 7: Rovnoramenný lichoběžník

Řešení. Střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s příslušnou stranou: $AB \parallel B_1A_1$, čtyřúhelník ABA_1B_1 je lichoběžník. Jsou-li úhly CAA_1, CBB_1 shodné, tj. úhly B_1AA_1, A_1BB_1 jsou shodné, leží body A, B, A_1, B_1 na kružnici a lichoběžník ABA_1B_1 je rovnoramenný. □

Úloha 2.7. *Kružnice k je rozdělena n průměry na shodné oblouky. Dokažte, že paty kolmic vedených k těmto průměrům z libovolného bodu M uvnitř kružnice tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka. (obr. 8)*

Řešení. Průměry kružnice vytínající na dané kružnici k shodné oblouky svírají shodné úhly, jejich velikost je $180°/n$. Proto i kolmice k nim svírají úhly téže velikosti.



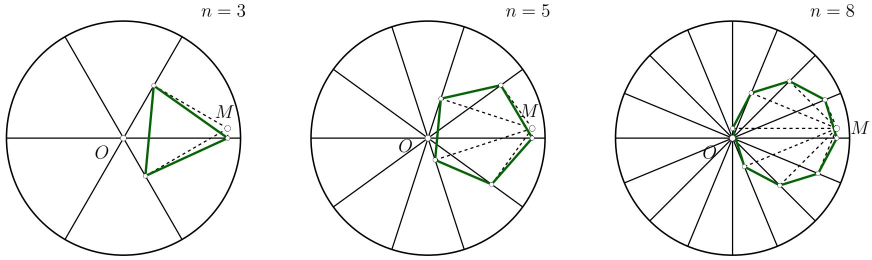
Obr. 8: Paty kolmic k průměrům kružnice

Paty kolmic vedených bodem M k průměrům leží na (Thalétově) kružnici o nad průměrem OM. Označme je A_i pro $i = 1, \ldots, n$ a předpokládejme, že bod O nesplývá s žádným z nich.

Tětivy $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, A_nA_1 jsou vyťaté na této kružnici jednak shodnými úhly s vrcholem $O \in o$, jejichž ramena jsou „sousední" průměry kružnice k, jednak shodnými úhly kolmic k těmto průměrům s vrcholem $M \in o$. Odchylky dvou „sousedních" přímek (průměrů i kolmic k nim) jsou vesměs shodné, rovné $\frac{180°}{n}$.

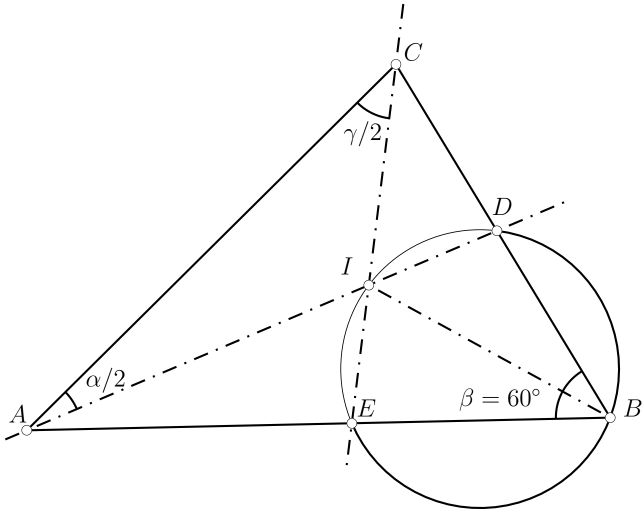
Zbývá případ, kdy bod O splývá s některou patou kolmice. Nechť je to bod A_k. Potom jsou tětivy $A_{k-1}A_k$ a A_kA_{k+1} vyťaty na kružnici o rameny úhlů $A_{k-1}MA_k$ a A_kMA_{k+1} velikosti $\frac{180°}{n}$.

Ramena shodných obvodových úhlů vytínají na kružnici shodné tětivy. Vzniklý n-úhelník je proto pravidelný. □



Obr. 9: Ilustrace k úloze 2.7

Úloha 2.8. *V trojúhelníku ABC je velikost úhlu β při vrcholu B rovna 60°. Osy úhlů BAC, BCA se protínají v bodě I a protínají protilehlé strany po řadě v bodech D, E. Dokažte, že $|ID| = |IE|$.*



Obr. 10: Řešení úlohy 2.8

Řešení. Připomeňme si, že pro shodné úhly EID, AIC platí:

$$|\sphericalangle AIC| = 180^\circ - (\alpha/2 + \gamma/2) = 90^\circ + \beta/2.$$

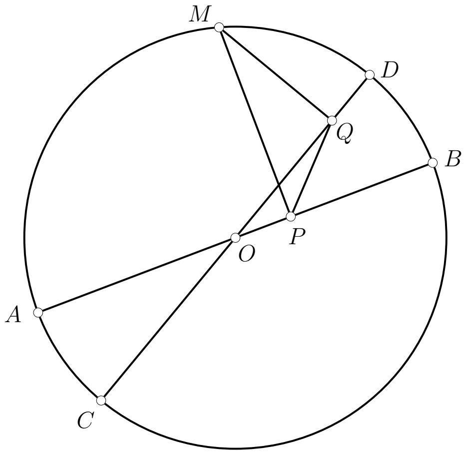
Pro zadanou velikost $\beta = 60^\circ$ tedy platí

$$|\sphericalangle EID| + |\sphericalangle EBD| = 90^\circ + \beta/2 + \beta = 180^\circ.$$

Body I, E, B, D proto leží na kružnici a tětivy ID, IE jsou vyťaty shodnými úhly DBI, EBI velikosti $\beta/2$. Proto $|ID| = |IE|$. □

Poslední úloha svým zadáním jistě připomíná úlohu 2.7. Zkuste ji nejprve vyřešit samostatně. Níže uvedené řešení je pouze slovní, obrázek 11 ukazuje jen zadání, aby na první pohled neprozrazoval řešení.

Úloha 2.9. *Bod M se pohybuje po dané kružnici, v níž jsme sestrojili průměry AB, CD. Sestrojíme paty kolmic P, Q vedených bodem M po řadě k průměrům AB, CD. Dokažte, že délka úsečky PQ nezávisí na poloze bodu M.*



Obr. 11: Zadání úlohy 2.9

Řešení. Podobně jako v úloze 2.7 opišme trojúhelníku PMQ kružnici o. Ta bude procházet bodem O pro každou polohu bodu M. Protože bod M leží na dané kružnici, je průměr kružnice o pevný, délka úsečky OM je poloměr dané kružnice.

Tětiva PQ je tětivou na kružnicích konstantního poloměru a je vyťata rameny pevného obvodového úhlu POQ (shodného s úhlem BOD). Rozmyslete si, že má konstantní délku, a to i v případě, že některý z bodů P, Q splyne se středem O dané kružnice. □

Literatura

[Pra] V. V. Prasolov: *Zadači po geometrii I.*, Moskva, 1986 (rusky).

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

KOMBINATORIKA

Antonín Jančařík, Jakub Michal

Určete počet devítimístných čísel, v nichž se číslice 0–9 vyskytují nejvýše jednou a v nichž se součty číslic na 1. až 3. místě, na 3. až 5. místě, na 5. až 7. místě a na 7. až 9. místě všechny rovnají témuž číslu 10. Najděte rovněž nejmenší a největší z těchto čísel.

S úlohami podobného typu jste se jistě již setkali při studiu kombinatoriky. Na úlohách v první kapitole si nejprve připomeneme, jak je možné obdobné problémy řešit. Následně se pokusíme vyřešit úlohu blízkou úloze ze zadání soutěže.

1 Připomenutí základů kombinatoriky

Předtím, než se pustíme do řešení první úlohy, připomeneme první z důležitých pravidel, které při samotném řešení, mnohdy intuitivně, využíváme.

Věta 1.1 (Kombinatorické pravidlo součinu)**.** *$M_1, M_2, \ldots, M_n$ jsou množiny. Pokud lze z množiny vybrat prvek nezávisle, pak počet všech možností takových výběrů, kdy z každé množiny vybíráme právě jeden prvek je $|M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|$.*

Aplikovat *pravidlo součinu* můžeme v následující úloze:

Úloha 1.2. *Určete počet devítimístných čísel, v nichž se číslice 0–9 vyskytují nejvýše jednou.*

Řešení. K řešení kombinatorických úloh lze zvolit mnoho odlišných přístupů. Jedním z častých a přehledných způsobů řešení úloh typu úlohy 1.2, je užití nějakého grafického organizéru dat. Těch je celá řada a každému vyhovuje jistě jiný. My však v dalším textu této kapitoly budeme používat *tabulkové schéma.*

Tabulka slouží k reprezentaci odlišných řádů čísla. Do jednotlivých políček pak (obvykle z leva do prava) doplňujeme, kolik různých cifer lze na dané místo dosadit. Pro úlohu 1.2 by tabulka vypadala například takto:

9	9	8	7	6	5	4	3	2

Poznámka 1.3. *Pozor na nulu! Aby číslo bylo devítimístné, nesmí se na prvním místě nula objevit!*

Poznámka 1.4. *V tabulce se nejedná o konkrétní cifry, ale o možný počet cifer, které lze na dané místo umístit.*

Dále využijeme *kombinatorického pravidla součinu* a počty možností pro jednotlivé cifry vynásobíme. Výsledek tedy je **3 265 920**. □

Obdobně intuitivní jako *kombinatorické pravidlo součinu* je i další z pravidel. Tím je tzv. *kombinatorické pravidlo součtu*, které využijeme v další z úloh.

Věta 1.5 (Kombinatorické pravidlo součtu)**.** *Nechť jsou každé dvě množiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$ disjunktní (tj. mají prázdný průnik). Pak* $|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n| = |M_1| + |M_2| + \cdots + |M_n|$.

Úloha 1.6. *Určete počet čtyřmístných čísel, v nichž se číslice 0–9 vyskytují nejvýše jednou a v nichž se součet cifer rovná deseti.*

Řešení. Nejprve najdeme všechny takové čtveřice cifer, jejichž součet je roven deseti. Při hledání je dobré zvolit systematický postup, abychom nevynechali některou z možností. Měli bychom se dostat k následujícím čtveřicím:

$$\{7,2,1,0\},\ \{6,3,1,0\},\ \{5,4,1,0\},\ \{5,3,2,0\},\ \{4,3,2,1\}.$$

Ty čtveřice, které obsahují nulu, lze přeskládat na čtyřciferné číslo počtem způsobů zachyceným tabulkou:

3	3	2	1

Tabulka pro poslední čtveřici $\{4,3,2,1\}$ by mohla vypadat takto:

4	3	2	1

Podle *kombinatorického pravidla součinu* tak lze vytvořit z každé ze čtveřic $\{7,2,1,0\}, \{6,3,1,0\}, \{5,4,1,0\}$ a $\{5,3,2,0\}$ právě **18** čísel (neboť $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$) splňujících zadanou podmínku. Ze čtveřice $\{4,3,2,1\}$ pak lze podle stejného pravidla vytvořit **čísel 24**.

Podle *kombinatorického pravidla součtu* tedy můžeme zkonstruovat $\mathbf{18+18+18+18+24=96}$ čísel, která splňují podmínky ze zadání.

□

2 Úlohy se spojkami

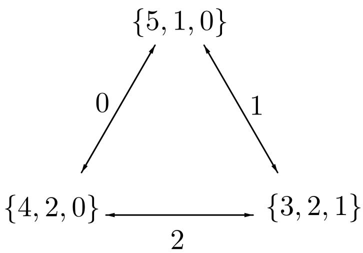
Soutěžní úloha se odlišuje od předešlých požadavkem na součty takových cifer, že některé z nich počítáme dvakrát (na třetím, pátém a sedmém místě). Těmto cifrám budeme v dalším textu říkat *spojky.*

Úloha 2.1. *Nalezněte počet všech pěticiferných čísel složených z cifer 0–9 tak, že každá je použita nejvýše jednou a zároveň platí, že součet prvních tří cifer, a také součet posledních tří cifer se rovnají šesti. Kolik z těchto čísel je dělitelných třemi?*

Řešení. Úlohu začneme řešit tak jako úlohu 1.6, tj. najdeme všechny trojice čísel, jejichž součet je roven šesti:

$$\{5,1,0\},\ \{4,2,0\},\ \{3,2,1\}.$$

Pěticiferné číslo bude tvořeno prvky dvou z těchto množin. Na obrázku 1 je znázorněno, která cifra bude *spojka* při použití dvou daných trojic.



Obr. 1: *Spojky* mezi neuspořádanými trojicemi z úlohy 2.1

1. Pro dvojici $\{5,1,0\}$ a $\{4,2,0\}$ je *spojkou* nula. Tu umístíme na místo stovek[5].

		0		

Na první dvě místa nejprve umísťujme například prvky z množiny $\{5,1,0\}$. Nepoužité cifry pět a jedna lze uspořádat dvěma způsoby.

5	1	0		
1	5	0		

[5] Tabulky v této kapitole znázorňují konkrétní umístění cifer, nikoliv počty možností jako v kapitole 1.

Na poslední dvě místa pak umístíme zbylé prvky z druhé množiny, tedy číslice 4 a 2. To lze učinit také dvěma způsoby.

5	1	0	4	2
5	1	0	2	4
1	5	0	4	2
1	5	0	2	4

Čísla, která splňují dané podmínky, zároveň začínají ciframi z množiny $\{5, 1, 0\}$ a končí prvky trojice $\{4, 2, 0\}$, jsou proto čtyři.

Úplně stejně bychom postupovali v opačném případě, kdy první trojici čísla tvoří cifry z množiny $\{4, 2, 0\}$ a poslední trojicí cifer jsou prvky z množiny $\{5, 1, 0\}$. Představit si to můžeme tak, že čtyři výše zkonstruovaná čísla čteme odzadu.

Proto je z množin $\{5, 1, 0\}$ a $\{4, 2, 0\}$ možné sestavit **osm čísel**, která splňují zadání.

2. Pro dvojici množin $\{5, 1, 0\}$ a $\{3, 2, 1\}$ je *spojkou* jednička. Umístíme ji na místo stovek a dále obsazujeme zbylé pozice stejně jako v případě 1.

   Nejprve na první dvě pozice volme nepoužité prvky například z první množiny, tedy pětku a nulu. Protože číslo nulou nemůže začínat (aby bylo pěticiferné), lze cifry dosadit pouze jedním způsobem.

5	0	1		

   Na poslední dvě pozice volíme nepoužité prvky z množiny $\{3, 2, 1\}$. Těmi je trojka a dvojka. Ty lze uspořádat dvěma způsoby.

5	0	1	2	3
5	0	1	3	2

   Taková čísla nalezneme proto dvě.

   Pokud bychom ovšem první tři místa obsazovali ciframi z druhé množiny $\{3, 2, 1\}$, situace by se změnila. První dvě místa obsazujeme čísly dva a tři. To je možné také dvěma způsoby:

2	3	1		
3	2	1		

Na posledních dvou místech řadíme čísla pět a nula. Opět existují dva způsoby:

2	3	1	5	0
3	2	1	5	0
2	3	1	0	5
3	2	1	0	5

Možnosti jsou proto čtyři.

Z množin $\{5, 1, 0\}$ a $\{3, 2, 1\}$ tím pádem lze sestrojit **šest vhodných čísel**.

3. Dvojice množin $\{4, 2, 0\}$ a $\{3, 2, 1\}$ má *spojkovou cifru* dva. Protože nezáleží na konkrétní hodnotě cifry (pokud se nejedná o nulu, jak jsme již viděli), bude počet možných řešení shodný jako v bodu 2, tedy **šest**.

Podle pravidla *kombinatorického součtu* proto existuje $\mathbf{8+6\ +6=20}$ různých pěticiferných čísel, která odpovídají podmínkám zadání.

K nalezení počtu čísel dělitelných třemi použijeme kritérium, které říká, že číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.

Ciferné součty trojmístných čísel utvořených z každé z množin $\{5, 1, 0\}$,$\{4, 2, 0\}$ nebo $\{3, 2, 1\}$ jsou dělitelné třemi. Protože ale mezi nimi existují *spojky*, bude vždy ciferný součet pětimístného čísla vytvořeného z dvojice neuspořádaných trojic roven součtu všech čísel v obou trojicích mínus těmto trojicím odpovídající *spojka.*

Aby dělitelnost třemi zůstala zachována, musí *spojka* být $0, 3, 6$, nebo 9. To splňuje pouze dvojice trojic $\{5, 1, 0\}$ a $\{4, 2, 0\}$. Již víme, že tato dvojice tvoří osm čísel odpovídajících zadání a nyní také víme, že je právě těchto **osm čísel** dělitelných třemi. □

Úloha 2.2. *Jsou dána všechna devíticiferná čísla taková, že každá cifra se v jejich dekadickém zápisu vyskytuje nejvýše jednou a jsou dělitelná devíti. Určete největší a nejmenší z nich.*

Řešení. Aby číslo bylo dělitelné devíti, musí jeho ciferný součet být dělitelný devíti. Jakých hodnot mohou tyto ciferné součty pro devítimístná čísla, jejichž cifry se nesmějí opakovat, nabývat?

Pokud z desíti cifer vybereme devět největších (tedy vynecháme nulu), dostáváme největší možný ciferný součet 45.

Protože ciferný součet $1 + 2 + \cdots + 8 + 9$ je dělitelný devíti, jsou všechna čísla složená z těchto cifer tak, že každá je použita právě jednou, dělitelná devíti a největším z nich je číslo **987 654 321**.

Když naopak vynecháme největší cifru, dostaneme ciferný součet 36. Čísla složená z cifer nula až osm (opět tak, že každá z těchto cifer je v čísle obsažena právě jednou) jsou proto také dělitelná devíti a nejmenším z nich je číslo **102 345 678**. □

Na závěr se podíváme na úlohu se dvěma *spojkami.*

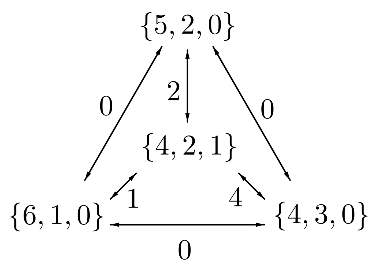
Úloha 2.3. *Najděte všechna taková sedmiciferná čísla, kde se každá z cifer vyskytuje nejvýše jednou, a zároveň platí, že součet cifer na 1. až 3. místě, na 3. až 5. místě a na 5. až 7. místě je vždy roven sedmi.*

Řešení. Opět najdeme trojice, jejichž ciferný součet je roven sedmi. Takovými trojicemi jsou:

$$\{6, 1, 0\},\ \{5, 2, 0\},\ \{4, 3, 0\},\ \{4, 2, 1\}.$$

Na obrázku 2 je schématicky znázorněno, jaké *spojky* mezi jednotlivými trojicemi cifer jsou. Při pohledu na trojúhelníky tvořené šipkami si lze všimnout, že nastávají dvě situace:

1. V trojici množin existují tři různé *spojky.*
2. V trojici množin existuje jedna *spojka.*



Obr. 2: *Spojky* mezi neuspořádanými trojicemi z úlohy 2.3

Pokud nastane první případ, pak není možné **žádné sedmiciferné číslo** splňující naše podmínky sestrojit, neboť k dispozici máme pouze $3 \cdot 3 - 3 = 6$ (což je počet cifer v trojicích mínus cifry, které se opakují) unikátních cifer na sedm řádů.

Pokud nastane případ dvě, také **nesložíme žádné sedmiciferné číslo** splňující podmínky, neboť k tomu jsou potřeba alespoň dvě různé *spojky.*

Počet čísel splňujících úlohu je tedy **nula**. □

Úlohu 2.3 lze řešit také takto:

Řešení. Nejmenším možným ciferným součtem sedmiciferného čísla, jehož cifry jsou odlišné, je $0 + 1 + \cdots + 6 = 21$.

Číslo, které máme sestrojit, má mít ciferný součet cifer na 1. až 3. místě, na 3. až 5. místě a na 5. až 7. vždy roven sedmi. Ciferný součet celého sedmiciferného čísla tak proto je $21 - (s_1 + s_2)$, kde s_1, s_2 jsou *spojky.*

I když budou obě spojky nejmenší možné, tedy nula a jedna, bude ciferný součet hledaného sedmiciferného čísla 20, což je méně, než minimální ciferný součet potřebný k vytvoření sedmiciferného čísla bez opakování cifer.

Řešení tedy neexistuje. □

Literatura

[BE] R. A. Beeler: *How to Count: An Introduction to Combinatorics and Its Applications.* Imprint: Springer, 2015. ISBN 978-3-319-13843-5.

GRAFY FUNKCÍ S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

Miroslav Zelený

Tato poznámka je věnována grafům funkcí, které jsou definovány pomocí absolutní hodnoty. Výklad může být užitečný při přemýšlení o úloze 71-B-I-4 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Určete počet reálných kořenů rovnice $x|x+6A| = 36$ *v závislosti na reálném parametru* A.

1 Trocha teorie

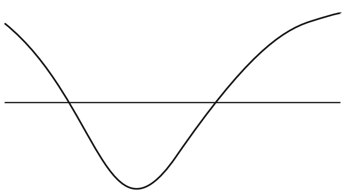
V následujících třech pozorováních vezmeme funkci f a její definiční předpis pozměníme jistým způsobem pomocí funkce absolutní hodnoty. Bude nás zajímat, jak tato modifikace ovlivní graf funkce. Poté přidáme ještě jedno pozorování, kde již absolutní hodnotu nebudeme používat. Funkce f bude pro nás reálná funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, jejíž definiční obor budeme značit $D(f)$.

1.1 První pozorování

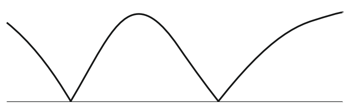
Funkce $|f|$ je na $D(f)$ definována předpisem

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{pokud } x \in D(f),\ f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{pokud } x \in D(f),\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Máme-li si udělat představu o tom, jak vypadá graf funkce $|f|$, můžeme nakreslit nejprve graf funkce f a potom nakreslit graf funkce $|f|$ tak, že část grafu funkce f nad osou x ponecháme, jak je, a část pod osou x zobrazíme osově souměrně podle osy x. Podívejte se na obrázky 1 a 2.



Obr. 1: Graf funkce f



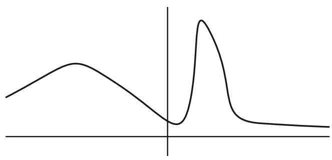
Obr. 2: Graf funkce $|f|$

1.2 Druhé pozorování

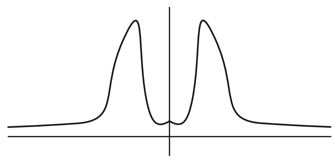
Definujeme-li k funkci f novou funkci g předpisem

$$g(x) = f(|x|),$$

pak je g definována pro každé $x \in \mathbb{R}$, které splňuje $|x| \in D(f)$. Graf funkce g vznikne z grafu funkce f tak, že vezmeme pouze graf funkce $f|_{[0,\infty)}$, tj. graf funkce f zúžené na množinu $D(f) \cap [0, \infty)$, a k němu přidáme jeho osově symetrický obraz podle osy y. Tak dostaneme graf funkce g. Podívejte se na obrázky 3 a 4.



Obr. 3: Graf funkce f



Obr. 4: Graf funkce g

1.3 Třetí pozorování

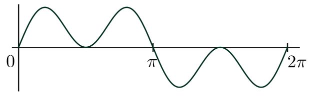
Nechť funkce f je zapsána ve tvaru $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. Funkci g definujme předpisem

$$g(x) = f_1(x) \cdot |f_2(x)|.$$

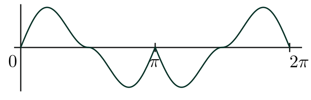
Funkci g můžeme také zapsat takto

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) \cdot f_2(x), & \text{pokud } x \in D(f),\ f_2(x) \geq 0, \\ -f_1(x) \cdot f_2(x), & \text{pokud } x \in D(f),\ f_2(x) < 0. \end{cases}$$

Máme-li graf funkce f, pak graf funkce g bude vypadat tak, že v osové symetrii s osou x zobrazíme ty části grafu f, kde je funkce f_2 záporná, zbývající část grafu funkce g se bude shodovat s grafem funkce f. Toto pozorování je zřejmě zobecněním prvního pozorování. Pro ilustraci se podívejte na obrázky 5 a 6, kde jsou grafy funkcí $f(x) = \cos x \cdot \sin(2x)$ a $g(x) = \cos x \cdot |\sin(2x)|$.



Obr. 5: Graf funkce f



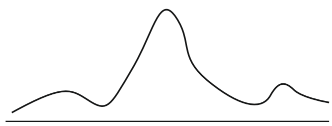
Obr. 6: Graf funkce g

1.4 Čtvrté pozorování

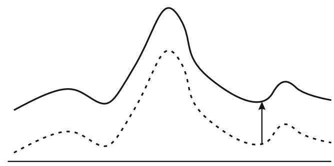
Definujeme-li k funkci f novou funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) + a, \qquad x \in D(f),$$

pak graf funkce g vznikne posunutím grafu f ve směru osy y o hodnotu a. Příslušné obrázky mají čísla 7 a 8.



Obr. 7: Graf funkce f

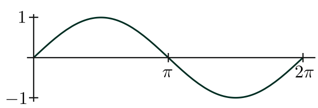


Obr. 8: Graf funkce g

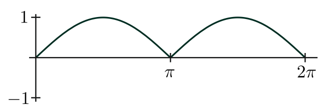
2 Trocha praxe

Úloha 2.1. *Nakreslete graf funkce* $f(x) = |\sin x|$

Řešení. Graf funkce f získáme z grafu funkce sinus pomocí Pozorování 1.



Obr. 9: Graf funkce sin
na intervalu $[0, 2\pi]$

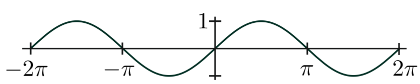


Obr. 10: Graf funkce $|\sin|$
na intervalu $[0, 2\pi]$

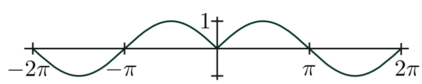
□

Úloha 2.2. *Nakreslete graf funkce* $f(x) = \sin|x|$.

Řešení. Opět vyjdeme z grafu funkce sinus, ale použijeme Pozorování 2.



Obr. 11: Graf funkce sin
na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$



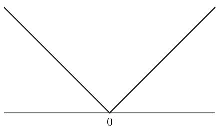
Obr. 12: Graf funkce f
na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$

□

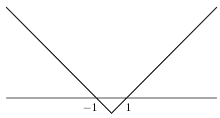
Úloha 2.3. *Nakreslete graf funkce*

$$f(x) = \Big|\big||x| - 1\big| - 1\Big| - 1\Big|.$$

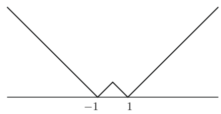
Řešení. V této úloze nejprve nakreslíme funkci $x \mapsto |x|$. Pak budeme postupně aplikovat Pozorování 1 a Pozorování 4 a nakreslíme grafy funkcí $x \mapsto |x| - 1$, $x \mapsto ||x| - 1|$, $x \mapsto ||x| - 1| - 1$, $x \mapsto |||x| - 1| - 1|$, $x \mapsto |||x| - 1| - 1| - 1$ a konečně graf funkce f.



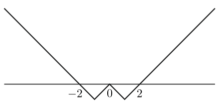
Obr. 13: $x \mapsto |x|$



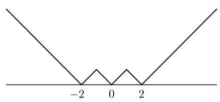
Obr. 14: $x \mapsto |x| - 1$



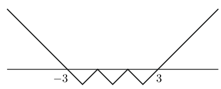
Obr. 15: $x \mapsto ||x| - 1|$



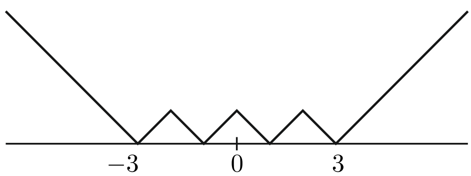
Obr. 16: $x \mapsto ||x| - 1| - 1$



Obr. 17: $x \mapsto \big|||x| - 1| - 1\big|$



Obr. 18: $x \mapsto \big|||x| - 1| - 1\big| - 1$

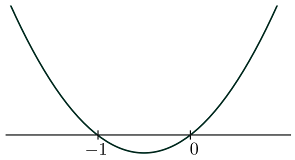


Obr. 19: Graf funkce f

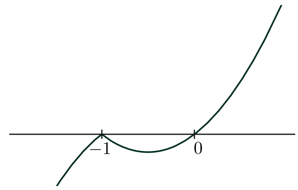
□

Úloha 2.4. *Nakreslete graf funkce* $f(x) = x \cdot |x + 1|$.

Řešení. Nejprve nakreslíme graf funkce $x \mapsto x(x + 1)$ a pak použijeme Pozorování 3.



Obr. 20: Graf funkce
$x \mapsto x(x+1)$



Obr. 21: Graf funkce f

□

Poznámka 2.5. Výše uvedené postupy mohou někdy značně usnadnit přemýšlení o některých problémech a mohou poskytnout inspiraci k jejich řešení. Na druhou stranu se však korektní matematický důkaz nemůže podstatným způsobem opírat o obrázky, i kdyby byly nakresleny počítačem.

TĚTIVOVÉ ČTYŘÚHELNÍKY A PŘENÁŠENÍ ÚHLŮ

Radovan Švarc

Při boji s geometrií se dá využít mnoho sofistikovaných zbraní. Tyto kanóny jsou ovšem náročnější na manipulaci a přes svou sílu jsou velmi specializované a použitelné jen na některé konkrétní typy úloh, takže se jimi zde zabývat nebudeme.[6] Místo toho se budeme soustředit na techniku přenášení úhlů, která by v naší zbraňové metafoře zastávala roli kapesního nože – pro velmi náročné problémy obvykle není postačující, ale zato je jednoduchá na používání a poměrně všestranná. Náročné problémy obvykle vyžadují její využití alespoň na část cesty, a jednodušší se často dají vyřešit jen s její pomocí. Takovou úlohou je i 71-B-I-5 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2 \ldots A_n$. Bod A_3 zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_2A_4, získáme bod A_3'. Pak bod A_3' zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_1A_3, získáme bod A_3''. Pro která $n \geq 4$ je bod A_3'' totožný s průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4?

1 Teorie

Krom součtu úhlů v trojúhelníku a standardních vztahů mezi vedlejšími, vrcholovými, souhlasnými a střídavými úhly se nejčastěji používají vztahy pro tětivové čtyřúhelníky. Předtím si však připomeňme vztahy mezi úhly v trojúhelníku.

Věta 1.1. *Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, úhel při vrcholu B (i jeho velikost) označme β. Pak pokud je β ostrý úhel, platí $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$, jinak $|\sphericalangle AOC| = 360^\circ - 2\beta$.*

Speciální případ této věty je tzv. Thalétova věta:

Věta 1.2. *Nechť ABC je trojúhelník, jehož střed kružnice opsané označíme jako O. Pak O leží na úsečce AC právě tehdy, když je úhel ABC pravý. V tom případě je O středem úsečky AC.*

[6] Zvídavému čtenáři doporučujeme hledat klíčová slova „kruhová inverze“, „spirální podobnost“ nebo třebas „projektivní geometrie“. Vhodná dokumentace k nim se při troše snahy dá najít kupříkladu na stránkách `prase.cz` nebo `iksko.org`.

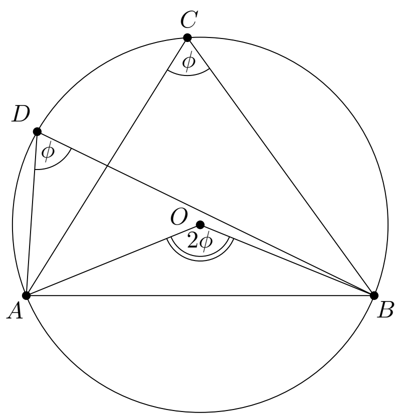
Pro srozumitelnost si zopakujme, co je to tětivový čtyřúhelník:

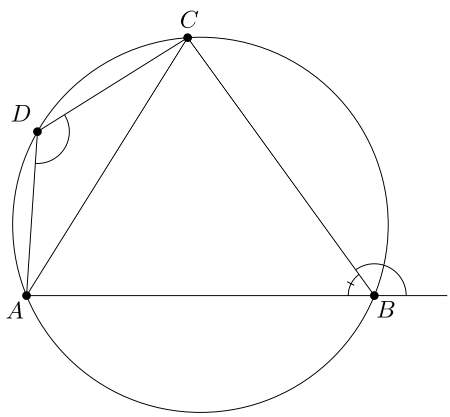
Definice 1.3. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ nazýváme *tětivový*, pokud mu lze opsat kružnice.

Nejdůležitější vztahy mezi úhly v tětivovém čtyřúhelníku jsou shrnuty v následující větě (která lze vcelku jednoduše dokázat za pomoci věty výše):

Věta 1.4. *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník.*

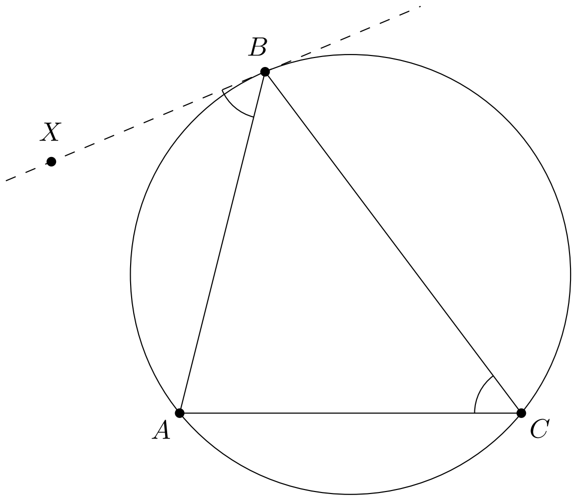
- *$ABCD$ je tětivový právě tehdy, když platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$. Pokud si v tomto případě střed kružnice opsané označíme jako O a velikost úhlu ACB jako φ, pak $|\sphericalangle AOB| = 2\varphi$, pokud je $\varphi < 90°$ a $|\sphericalangle AOB| = 360° - 2\varphi$ jinak. Úhel φ se někdy nazývá* obvodový úhel příslušný oblouku *ACB a úhel AOB se někdy nazývá* středový úhel příslušný tětivě *AB.*
- *$ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°$. Úhly ABC a ADC se pak někdy nazývají* doplňkové.





Nakonec ještě zmiňme podobné tvrzení o tečnách. Můžete si rozmyslet, že to je vlastně jen předchozí věta v případě, že dva body čtyřúhelníka splývají.

Věta 1.5. *Nechť ABC je trojúhelník a X je bod ležící v jiné polorovině určené přímkou AB než bod C. Potom BX je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABC právě tehdy, když $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABX|$. Tomuto úhlu říkáme* úsekový úhel.

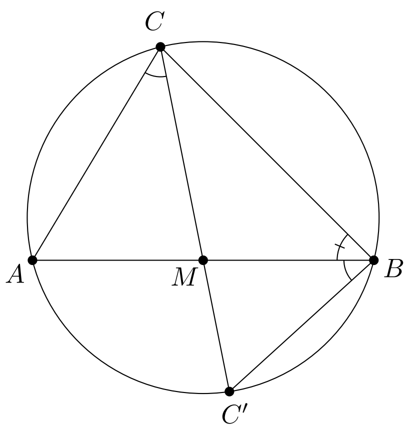


2 Praxe

Nyní si předvedeme, jak se dají tyto věty využít na řešení úloh z minulých ročníků olympiády.

Úloha 2.1. *Označme M střed strany AB libovolného trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = 90^\circ$ platí, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB nebo pravoúhlý s přeponou AB.*

(63-A-II-2)



Řešení. Nejprve předpokládejme, že $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = 90^\circ$, druhou implikaci dořešíme později. Abychom byli schopni nějak dobře pracovat s úhly pomocí výše uvedených vět, potřebujeme nějakou kružnici. Dokresleme si tedy kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Označme si jako C' bod, ve kterém přímka CM protne kružnici opsanou ABC a rovnou si jako O označme střed této kružnice. Z věty o obvodových úhlech pak víme, že

$$|\sphericalangle ABC'| = |\sphericalangle ACC'| = |\sphericalangle ACM| = 90^\circ - |\sphericalangle ABC|,$$

takže

$$|\sphericalangle CBC'| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ABC'| = |\sphericalangle ABC| + 90^\circ - |\sphericalangle ABC| = 90^\circ.$$

Z toho již za pomocí Thalétovy věty plyne, že O leží na přímce CC'. Odtud plyne, že O leží na přímce CM.

Nyní máme dvě možnosti. První možností je, že $M = O$. V tom případě již platí, že ABC je pravoúhlý s přeponou AB díky Thalétově větě. V případě, že $M \neq O$ využijeme toho, že střed kružnice opsané leží na osách stran, takže přímka OM je osa AB. Na této přímce ale leží C, takže C je na ose strany AB, tedy $|CA| = |CB|$. (To, že $O \neq M$ jsme využili k tomu, aby přímka OM byla skutečně dobře definovaná.)

Ještě zbývá ukázat obrácenou implikaci. Pokud je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, je $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CAB|$ a $2|\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle ACB|$. Potom

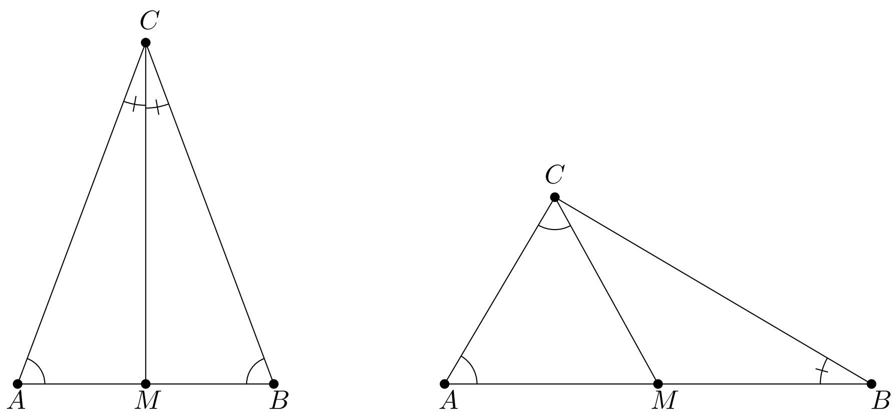
$$2|\sphericalangle ABC| + 2|\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ,$$

což po vydělení dvěma dává to, co jsme chtěli.

Pokud je trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB, je z Thalétovy věty M středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, tedy $|AM| = |CM|$, čili $|\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle CAM| = |\sphericalangle CAB|$. Pak

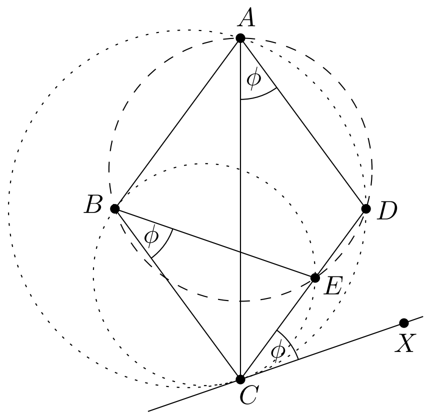
$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ - |\sphericalangle ACB| = 90^\circ.$$

□



Úloha 2.2. *Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A, mají-li kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod.*

(67-B-I-3)



Řešení. To, že kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE mají právě jeden společný bod znamená, že mají v bodě C společnou tečnu. Nechť X je bod na této společné tečně, který leží v jiné polorovině určené přímkou CD než A a B. Dvojím použitím věty o úsekových úhlech získáme vztah

$$|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle ECX| = |\sphericalangle DCX| = |\sphericalangle DAC|.$$

Tento úhel označme jako φ. Protože $ABCD$ je kosočtverec, je AC osa úhlu BAD, takže $|\sphericalangle BAD| = 2|\sphericalangle DAC| = 2\varphi$. Z rovnoběžnosti přímek AB a CD je $|\sphericalangle CDA| = 180° - |\sphericalangle BAD| = 180° - 2\varphi$. Protože $ABED$ je tětivový čtyřúhelník, víme z věty o doplňkových úhlech v tětivovém čtyřúhelníku, že $|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle EDA| = 180°$. Potom

$$|\sphericalangle ABE| = 180° - |\sphericalangle EDA| = 180° - |\sphericalangle CDA| = 180° - (180° - 2\varphi) = 2\varphi.$$

Odtud dostáváme

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle ABE| = \varphi + 2\varphi = 3\varphi.$$

Ale protože $ABCD$ je kosočtverec, je $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Takže nakonec dostáváme

$$3\varphi = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA| = 180° - 2\varphi.$$

Z toho plyne $5\varphi = 180°$, čili $\varphi = 36°$. Takže velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je rovna $|\sphericalangle BAC| = 2\varphi = 72°$. □

Literatura

[MO] *Matematická olympiáda.* http://www.matematickaolympiada.cz

EXTRÉMNÍ INVARIANTY NA ŠACHOVNICI

JAN KREJČÍ

Letošní šestá úloha kategorie B dohromady spojuje několik skupin úloh. My se v tomto příspěvku podíváme na každou skupinu zvlášť a na čtenáři (nebo jeho/jejích studentech) bude, aby popsané techniky zužitkoval v soutěžní úloze.

Je dána šachovnice $m \times n$, jejíž políčka jsou obarvena černě a bíle klasickým způsobem, přičemž levé horní políčko je černé. Tahem rozumíme vzájemnou výměnu dvou řádků nebo vzájemnou výměnu dvou sloupců šachovnice. Skvrnou rozumíme takovou neprázdnou množinu černých políček, která je tvořena všemi políčky, do nichž lze z jednoho jejího políčka přejít po cestě sestávající ze stranou sousedících černých políček. V závislosti na přirozených číslech m a n určete, kolik nejméně skvrn může být na šachovnici $m \times n$ po provedení konečného počtu tahů.

1 Extremální úlohy

Úloha výše spadá do kategorie úloh, které se nás ptají na nalezení extrému nebo trochu nepřesněji na nalezení toho, jak *dobře* lze něco udělat. Na následujícím příkladu si projdeme náležitosti, které řešení tohoto typu úloh vyžaduje, a ukážeme si, jakých postupů se naopak vyvarovat.

Úloha 1.1. *(MKS 33-4-6) Jaký maximální počet věží můžeme umístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, že každá věž je ohrožena nejvýše jednou další věží?*

Co tedy řešení takové úlohy musí obsahovat? Přirozeně člověk musí přijít na to, *jak dobře* to jde (kolik věží se nám na šachovnici vejde). Další, neméně podstatná, část je ukázat, že *lépe už to nejde* (bude-li na šachovnici více věží, pak už nebudou splněny podmínky zadání).

Nejčastější chyby budeme ilustrovat na následujícím řešení.

Řešení. Pokusíme se na šachovnici umístit věže podle zadání. Budeme je na šachovnici přidávat po dvojicích tak, aby nám zabraly co nejméně místa, tj. co nejméně řádků a sloupců. Je jasné, že tyto věže musí sdílet buď řádek nebo sloupec (jinak zaberou o řádek nebo sloupec více). Problém je, že pokud věže sdílí sloupec, pak zaberou jeden sloupec, ale dva řádky, takže musíme střídat, jestli sdílí řádek nebo sloupec, jinak jedny vyčerpáme a ve druhých bude ještě místo. Tímto způsobem můžeme „vyplnit“ všechny řádky a sloupce, takže maximální počet věží na šachovnici je $2 \cdot \frac{6n}{3} = 4n$. □

Toto řešení obsahuje všechna podstatná pozorování nutná k vyřešení úlohy, nicméně není správně. Co v něm není správně?

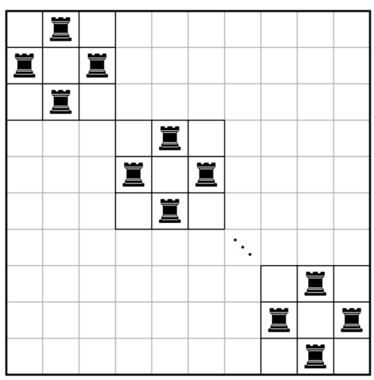
V prvé řadě řešení dokazuje, že pokud **budu na šachovnici pokládat věže popsaným způsobem**, pak se jich tam vejde nejvýše $4n$. Úloha se mě ovšem ptá, **kolik nejvíce jich tam umím dostat**.

To znamená, že aby bylo toto řešení správně, musel bych ukázat, že lepší způsob umisťování věží na šachovnici skutečně není (což je v řešení řečeno, ale není dokázáno). Za druhé by se řešení muselo popasovat se situací, kdy maximální počet věží je lichý, protože v něm věže umisťuji po dvou.

Idea „nejlepšího možného“ uspořádání velmi často nevede k úplnému řešení a v nejhorším případě dokonce řešitele svede úplně z cesty. Pokud tedy nemám neprůstřelné zdůvodnění, že mé uspořádání je skutečně nejlepší, tak je lepší tuto ideu nepoužívat.

Za třetí, v řešení má být příklad toho, jak na šachovnici dostanu $4n$ věží a jediné, co v něm je, je mlhavé nastínění, jak bych měl postupovat. Chci-li mít korektní řešení, musím rozmístění popsat tak, že je snadno pochopitelné i pro člověka, který úlohu neřešil (mohu využít například obrázky nebo náčrtky). Jak tedy úlohu vyřešit lépe?

Řešení. Nejdříve ukážu, že na šachovnici mohu umístit $4n$ věží. Na diagonále si vyberu n čtverců 3×3 a do každého z nich umístím 4 věže (viz obrázek).



Nyní ukážu, že více věží se mi na šachovnici nevejde. Označme o počet párů věží, které se ohrožují navzájem (je-li věž ohrožena, pak je ohrožena právě jednou další věží), a f počet věží, které nejsou ohrožené.

Všimněme si, že v každém řádku a sloupci šachovnice musí být nejvýše dvě věže a pokud v řádku jsou dvě věže, pak ve sloupcích, ve kterých tyto dvě věže jsou nemůže být již žádná další věž. Tvrzení platí i pokud zaměním řádky za sloupce a naopak. To znamená, že počet řádků a sloupců, ve kterých najdu věž, je $3o + 2f$ a tento počet musí být menší nebo roven počtu řádků a sloupců šachovnice, tj.

$$3o + 2f \leq 6n.$$

Vzhledem k tomu, že o i f jsou nezáporná čísla, tak z toho dále plyne, že

$$\frac{3}{2}f + 3o \leq 2f + 3o \leq 6n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}f + o \leq 2n \quad \Longrightarrow \quad f + 2o \leq 4n.$$

□

Podstatná změna v řešení je, že se „párování“ věží používá pro zkonstruování příkladu, kdy na šachovnici umístíme $4n$ věží. Na druhou stranu, při dokazování, že lépe už to nejde, se předpokládá, že na šachovnici je několik ohrožujících se *i* několik neohrožujících se věží.

Ukázat, že lépe už to nejde, často nelze provést přímo, proto zde uvedeme řešení, které využívá další častou techniku, a tou je spor. Budeme předpokládat, že to jde lépe, než jak jsem to spočítal, a dalším postupem dojdeme k něčemu nesmyslnému. Z toho pak plyne, že lépe už to nejde.

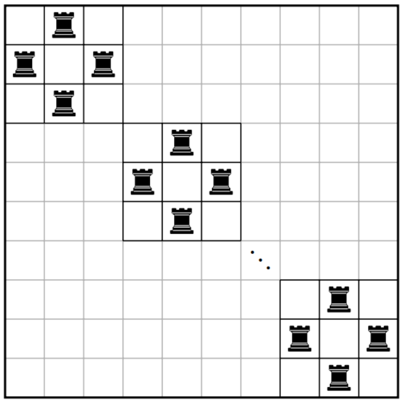
Řešení. Dokažme sporem, že na šachovnici se za dané podmínky nevejde více než $4n$ věží. Předpokládejme, že maximální počet věží je alespoň $4n+1$. Na začátku si všimněme, že v každém řádku a sloupci mohou být nejvýše dvě věže. Navíc, pokud v jednom řádku budou dvě věže, pak ve sloupcích, ve kterých tyto dvě věže jsou, už nemůže být žádná další věž.

Máme-li $4n + 1$ věží a $3n$ řádků, pak musí být alespoň v $n + 1$ řádcích dvě věže. To díky pozorování výše znamená, že v alespoň $2(n + 1)$ sloupcích musí být pouze jedna věž. Ve zbývajících nejvýše $3n - 2(n+1) = n - 2$ sloupcích pak mohou být nejvýše dvě věže. Spočítáme-li nakonec počet věží přes sloupce, dostaneme, že jich celkem může být maximálně

$$2(n+1) + 2(n-2) = 4n - 2 < 4n + 1.$$

To je spor, protože jsme na začátku předpokládali, že věží je alespoň $4n + 1$.

Nyní ukážeme, že umíme na šachovnici rozmístit $4n$ věží – vybereme si na diagonále čtverce 3×3, jejichž řádky a sloupce se nepřekrývají, a do každého takového čtverce umístíme 4 věže (viz obrázek).



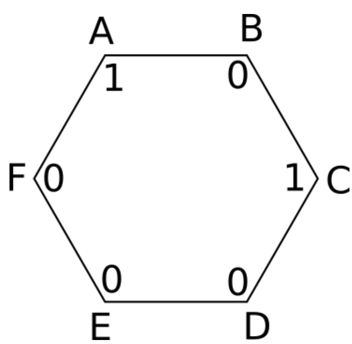
□

2 Invarianty

Jádrem další skupiny úloh je všimnout si, že v nich nějaká veličina zůstává konstantní (nebo také invariantní). Co to znamená?

Úloha 2.1 (FK)**.** *Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?*

Řešení. Označme vrcholy postupně písmeny A–F (jako na obrázku) a označme S_1 součet čísel ve vrcholech A, C, E a S_2 součet čísel ve vrcholech B, D, F.



Všimněme si, že zvýšením dvou sousedních čísel se rozdíl $S_1 - S_2$ nemění, protože o jedničku zvýšíme jak číslo S_1, tak S_2. To znamená, že tento rozdíl bude vždy 2.

Aby všechna čísla byla stejná, musel by tento rozdíl být 0, takže odpověď na otázku úlohy je, že popsanou operací není možné dosáhnout šesti stejných čísel. □

Jak již bylo řečeno výše, invariant je veličina, která se nemění (nebo se mění nějakým předepsaným způsobem). Práce s ním není těžká, ale někdy je těžké ho najít. Mezi typické příklady invariantů patří:

- součty, součiny, rozdíly čísel (případně jejich zbytků po dělení vhodným číslem)
- součty čtverců, průměry
- složitější algebraické výrazy
- u figur na šachovnici to může být barva polí, na která se mohou pohnout, nebo třeba fakt, že barvu polí v každém tahu mění.

Invarianty se často používají k tomu, aby člověk dokázal, že něco *nejde*, takže se mohou hodit v extremálních úlohách k dokázání druhého kroku, že lépe už to nejde. Podívejme se na další úlohu.

Úloha 2.2 (ML). *Rado si pořídil 100 krav. Ubytoval je v 4 ohradách. Do severní zahnal 10 krav, do východní 20, do jižní 30 a do západní 40. Mezi ohradami je branka, která funguje tak, že z vybrané ohrady vypustí 3 krávy, které pak každá zamíří do jiné ohrady. Např. pokud bychom ze severní ohrady vypustili 3 krávy, pak budeme mít 7 krav v severní, 21 ve východní, 31 v jižní a 41 v západní. Dokažte, že použitím této branky není možné docílit toho, aby v každé ohradě bylo 25 krav.*

Řešení. Zde nám nepomůže parita[7], nicméně se místo na počty krav můžeme dívat na jejich *zbytky* modulo[8] 4. Pak si můžeme všimnout, že zbytky modulo 4 se po použití branky ve všech ohradách zvýší o 1 (po zbytku 3 následuje zbytek 0).

Na začátku jsou zbytky modulo 4 postupně 2, 0, 2 a 0 pro severní, východní, jižní a západní ohradu. Má-li být každé ohradě stejné množství krav, musíme se dostat do stavu, kdy jsou zbytky modulo 4 stejné. Toho nelze dosáhnout kvůli tomu, co bylo řečeno výše. □

[7] Když mluvíme o paritě, zajímá nás, zda je číslo sudé, nebo liché.
[8] Fráze *zbytek modulo 4* má stejný význam jako fráze *zbytek po dělení číslem 4*.

Na závěr rozebereme ještě jednu těžší úlohu.

Úloha 2.3 (FK). *Máme 3 hromádky fazolí. Na jedné hromádce leží modré, na druhé červené a na třetí zelené fazole. V jednom tahu smíme provést výhodnou výměnu: zahodíme dvě fazole, každou jiné barvy a dostaneme za ně fazoli barvy třetí. Kdy můžeme tímto postupem skončit s jedinou fazolí?*

Řešení. Všimněme si nejdříve, že pokaždé, když vyměníme dvě fazole za jednu, tak se celkový počet fazolí na hromádkách sníží o jedna. To znamená, že po konečném počtu kroků naše snažení skončí buď úspěchem nebo neúspěchem a nemůže se stát, že se zacyklíme.

Dále si všimněme, že se nám v každém kroku změní parita počtu fazolí na všech třech hromádkách. Označme počty fazolí a, b a c a podívejme se na zbytky, které trojice $(a-b, b-c, c-a)$ dává po dělení dvěma.

Součet těchto zbytků modulo 2 bude sudý, protože se tato 3 čísla posčítají na 0. To znamená, že v této trojici zbytků nebude buď žádná jednička, nebo budou dvě. V normální řeči to znamená, že buď všechna tři čísla budou mít stejnou paritu a nebo naopak všechna tři stejnou paritu mít nebudou. První z těchto situací budeme značit $(0,0,0)$ a druhou $(1,1,0)$. Platí, že se neumíme dostat ze situace $(0,0,0)$ do situace $(1,1,0)$, protože každým tahem se parita počtů fazolí na všech hromádkách změní.

Z toho plyne, že pokud začínáme v situaci $(0,0,0)$, pak nemůžeme zůstat s jedinou fazolí, protože to je situace $(1,1,0)$. Zbývá ukázat, že pro libovolnou situaci $(1,1,0)$ s jedinou fazolí skončit umíme.

Předpokládejme, že máme 3 hromádky fazolí a parity počtů fazolí na jednotlivých hromádkách nejsou všechny stejné. Pokud máme alespoň 2 hromádky s nenulovými počty fazolí, pak můžeme vždy z dvou největších odebrat po fazoli a přidat jednu fazoli na hromádku nejmenší. Takto pokračujeme, dokud můžeme.

Pokud jsme naším posledním tahem zredukovali počet nenulových hromádek na jednu, což se někdy nutně musí stát kvůli pozorování na začátku, pak počet fazolí na této hromádce je 1. Proč?

Je-li to poslední (neprázdná) hromádka, museli jsme na ni v posledním tahu přidat fazoli – jinak by nebyla poslední neprázdná. To můžeme udělat jedině tak, že odebereme fazole ze zbylých dvou hromádek. Ty na sobě měly 1 fazoli, protože v dalším tahu už jsou prázdné, a to je maximum, kolik toho na sobě mohla mít poslední hromádka (jinak bychom odebírali fazoli z ní). Na té ovšem nemohla být jedna fazole, protože pak by všechny tři počty měly stejnou paritu (nemůžeme přejít ze situace $(1,1,0)$ do $(0,0,0)$), tedy na poslední hromádce v předposledním tahu nebyla žádná fazole.

To znamená, že jsme dokázali, že s jednou fazolí umíme skončit právě tehdy, když začínáme s počty fazolí, které nemají všechny stejnou paritu.

□

Všimněme si, že invariant jsme nyní použili pouze na první část úlohy – pro nalezení nutné[9] podmínky na počty fazolí. Druhá, neméně podstatná, část pak bylo dokázat, že tato podmínka je i postačující[10], což jsme dokázali tím, že jsme vymysleli (a dobře popsali) algoritmus, jak dosáhnout situace s jednou fazolí.

Řešení by nebylo kompletní bez obou těchto částí. Pokud bychom měli pouze nutnou podmínku, pak by nám chyběl důkaz, že všechny objekty, které ji splňují, splňují i zadání. Naopak, pokud bychom měli pouze konstrukci, chyběl by nám argument, proč nemůže zadání splňovat i trojice čísel se stejnou paritou.

Na závěr tohoto příspěvku se zvídavý čtenář může popasovat s neřešenými úlohami. Úlohy nejsou řazeny podle použité techniky. Stane-li se, že si čtenář nebude vědět rady, nebo si bude chtít ověřit výsledek, může nahlédnout do zdrojů. V některých případech obsahují krom zadání i řešení. V opačném případě je možné kontaktovat autora příspěvku a ten (snad) čtenáři poradí. Bude-li tato sbírka úloh čtenáři malá, může rovněž nahlédnout do zdrojů, protože obsahují další úlohy.

3 Úlohy na procvičení

Úloha 3.1. *(MKS 37-4-2) Mocný rytíř Šiškulín bojuje se zákeřným sedmatřicetihlavým drakem Šmudlou. Jedním švihem může drakovi useknout 3, 5 nebo 8 hlav. Učiní-li tak, pak v 1. případě drakovi naroste 9 hlav, v 2. případě mu narostou 2 a v posledním mu naroste dokonce 11 hlav. Drak zemře, pokud ztratí všechny své hlavy. Rozhodněte, zda může Šiškulín porazit Šmudlu.*

[9] Nutná podmínka je taková, kterou musí splňovat každé řešení, nicméně pokud něco splňuje nutnou podmínku, ještě to neznamená, že je to řešení. Např. čísla dělitelná 4 musí mít sudou poslední cifru, nicméně číslo 2 není dělitelné 4.

[10] Postačující podmínka znamená, že objekt splňující tuto podmínku je řešení. Zde pro změnu platí, že ne všechna řešení musí splňovat postačující podmínku. Např. všechna čísla s posledním dvojčíslím 24 jsou dělitelná 4, nicméně 108 je také dělitelné čtyřmi a nekončí na dvojčíslí 24.

Úloha 3.2 (ML)**.** *Šachovnice* 8×8 *je obarvená standardním způsobem. Káti šachovnice přišla nudná, tak se rozhodla, že by mohla buď v řádku, sloupci, nebo čtverci* 2×2 *prohodit barvy políček – z bílých políček by udělala černá a z černých bílá. Dokažte, že po konečném počtu takových úprav nemůže na šachovnici být 63 černých a 1 bílé políčko.*

Úloha 3.3. *Na poli* 7×7 *hrajeme lodě. Soupeř na něm má někde umístěnou loď* 1×4 *(může být umístěna vodorovně nebo svisle). Kolik nejméně výstřelů potřebujeme, abychom ji s jistotou zasáhli?*

Úloha 3.4. *Na ciferníku hodin jsou napsaná čísla 1 až 12. V jednom kroku je možné zaměnit čísla na protějších pozicích, nebo k číslům na sousedních pozicích přičíst jedničku. Je možné se po konečně mnoha krocích dostat do stavu, kdy na všech místech jsou stejná čísla?*

Úloha 3.5 (MKS 27-5-4)**.** *Myreg má 2008 tabulek 72% čokolády, které mají postupně jednu, dvě, tři až 2008 kostiček. Myreg si každý den vybere několik tabulek a z každé z nich sní stejný počet dílků. Za kolik nejméně dnů může Myreg všechny čokolády sníst a jakým způsobem?*

Úloha 3.6 (VK)**.** *Máme celá čísla* $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 4n-1$. *V každém kroku nahradíme libovolná dvě čísla jejich rozdílem. Dokažte, že poslední číslo bude sudé.*

Úloha 3.7 (MKS 33-4-4)**.** *V závislosti na* n *určete, kolik nejvýše podmnožin množiny* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *můžeme vybrat tak, aby každé dvě z těchto podmnožin měly nejvýše 2 společné prvky?*

Úloha 3.8 (MKS 33-4-7)**.** *Máme neobarvenou šachovnici* 7×7. *Jaký nejmenší počet políček musíme obarvit, aby každý 5políčkový (řecký) kříž obsahoval alespoň jedno obarvené políčko?*

Úloha 3.9 (VK)**.** $2n$ *velvyslanců je pozvaných na kongres. Každý z nich má nejvýše* $n-1$ *nepřátel. Dokažte, že je můžeme usadit kolem kulatého stolu tak, že nikdo nesedí vedle svého nepřítele.*

Zdroje

[MKS] Archiv úloh matematického korespondenčního semináře. V označení [MKS xx-y-z] odpovídá číslo xx ročníku, y pořadí série v ročníku a z pořadí příkladu v sérii.

[FK] F. Konopecký: Sborníkový příspěvek *Invarianty a v čem vězí*. Dostupné na adrese:
`https://prase.cz/library/InvariantyFK/InvariantyFK.pdf`.

[ML] M. Lavrov: The Invariance Principle. Zadání dostupné na adrese:https://www.math.cmu.edu/~cargue/arml/archive/15-16/proofs-02-28-16.pdf,
řešení dostupné na adrese:https://www.math.cmu.edu/~cargue/arml/archive/15-16/proofs-02-28-16-solutions.pdf

[VK] V. Kala: Sborníkový příspěvek *Neměnky*. Dostupé z: https://prase.cz/library/NemenkyVK/NemenkyVK.pdf

Kategorie

C

ČÍNSKÁ VĚTA O ZBYTCÍCH

Antonín Jančařík, Jakub Michal

Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde.

Po přečtení úlohy se vám jistě vybavily termíny jako dělitelnost a dělení se zbytkem. Dělení se zbytkem známe již z prvního stupně základní školy, z druhého pak mimo jiné i tzv. *kritéria dělitelnosti.* Také za jejich pomoci je možné úlohu řešit. V tomto článku si však představíme jiný, velmi silný nástroj na řešení úloh tohoto, ale i jiného typu.

1 Pár slov k modulární aritmetice

V dalším textu budeme používat pojmy jako *modulo* nebo *kongruence.* V této kapitole proto tyto termíny, spadající do kapitoly tzv. *modulární aritmetiky*, stručně představíme[11]. Modulární aritmetika má uplatnění nejen při řešení mnohých, ryze matematických problémů, ale má také reálné využití například v kryptologii.

Definice 1.1. Nechť n je přirozené číslo. O dvojici čísel $a, b \in \mathbb{Z}$ řekneme, že je *kongruentní modulo* n právě tehdy, pokud mají a i b stejný zbytek po dělení číslem n. Zapisujeme $a \equiv b \pmod{n}$.

Úloha 1.2. *Rozhodněte, zda platí:*

- $4 \equiv 9 \pmod{5}$,
- $11 \equiv 7 \pmod{4}$,
- $-4 \equiv 5 \pmod{3}$.

Řešení. Všechny tři kongruence jsou pravdivé – čtyřka má stejný zbytek po dělení pěti jako devítka, a také jedenáctka má stejný zbytek

[11] Více o modulární aritmetice se dočteme například v [Ro].

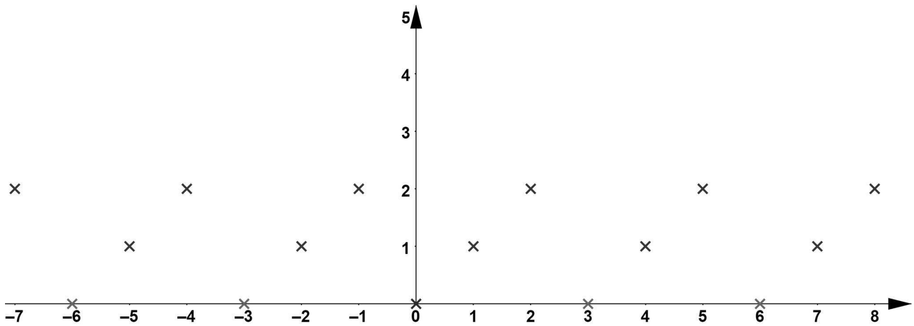
po dělení čtyřmi jako sedmička. Pokud dělíme třemi číslo -4, je zbytek dvě[12] stejně jako při dělení pětky. To může na první pohled působit neintuitivně. Pro lepší představu může sloužit například zápis $-4 = -2{\cdot}3{+}2$, kde dvojka představuje zbytek. □

Zůstaňme ještě chvíli u kongruence $-4 \equiv 5 \pmod 3$. Víme již, že tento vztah je pravdivý, dokážeme ale najít další prvky, se kterými je -4 a 5 kongruentní? A co najít všechny?

Vidíme, že podstatný pro kongruenci je zbytek po dělení. Při dělení třemi mohou nastat právě tři případy, zbytek je nulový (pro násobky tří, tedy čísla ve tvaru $3k, k \in \mathbb{Z}$), zbytek je jedna (pro čísla ve tvaru $3k+1, k \in \mathbb{Z}$), nebo je zbytek dva (pro čísla ve tvaru $3k+2, k \in \mathbb{Z}$).

Pokud si zobrazíme do grafu zbytky čísla ($f : x \mapsto x \bmod 3$) po dělení třemi (viz obrázek 1), tak čísla splňující kongruenci $x \equiv a$ jsou taková x, pro která platí $f(x) = a$.

Protože při práci v modulární aritmetice modulo n nás zajímají pouze zbytky po dělení, můžeme s každou z těchto množin pracovat jako s jedním prvkem. Těmto prvkům říkáme *zbytkové třídy*.



Obr. 1: Grafické znázornění kongruence modulo 3

2 Čínská věta o zbytcích

Věta 2.1 (Čínská věta o zbytcích)**.** *Jsou dána celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Dále čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, která jsou po dvou nesoudělná. Pak má*

[12] Zbytky po dělení jsou vždy nezáporná celá čísla.

soustava kongruencí

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \ \textit{(mod } n_1\textit{)},\\ x &\equiv a_2 \ \textit{(mod } n_2\textit{)},\\ &\ \vdots\\ x &\equiv a_k \ \textit{(mod } n_k\textit{)}, \end{aligned}$$

právě jedno řešení[13] *modulo* $N = n_1 n_2 \dots n_k$.

Věta mluví o soustavě kongruencí. Co to znamená, si nejlépe představíme na konkrétní úloze, která do jisté míry připomíná úlohu o molekulách:

Úloha 2.2. *Mažoretky se chtějí postavit do obdélníkové formace. První navrhne, že v každé řadě bude stát pět dívek. Po vytvoření formace ale zjistí, že čtyři přebývají. Druhá proto navrhne, že v řadě bude stát dívek sedm. Nyní jich ovšem přebývá šest. Třetí nakonec přijde s nápadem, kdy vedle sebe v řadě stojí tři mažoretky. I v tomto postavení ale zbyla navíc jedna dívka. Kolik mohlo být mažoretek?*

Řešení. Úlohu si nejprve přepíšeme na soustavu kongruencí. Hledaný počet dívek označme x. Víme, že po vydělení počtu dívek pěti zbyly čtyři, což lze zapsat jako $x \equiv 4 \pmod 5$. Obdobně přepíšeme i zbylé informace a dostáváme soustavu kongruencí:

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \pmod 5,\\ x &\equiv 6 \pmod 7,\\ x &\equiv 1 \pmod 3. \end{aligned}$$

Protože jsou čísla tři, pět a sedm po dvou nesoudělná, můžeme podle *Čínské věty o zbytcích* dojít k závěru, že existuje právě jedno řešení modulo $N = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Věta ovšem nezmiňuje, jakým způsobem lze takové řešení nalézt. Možnou metodou by bylo vyzkoušet všech 105 čísel (případně bychom mohli vynechat taková, která jsou dělitelná 5, 7 nebo 3). Postupovat můžeme ale i jinými, efektivnějšími metodami. Jedna z nich by mohla vypadat takto:

[13] Jinými slovy v množině $M = \{0, 1, \dots, (n_1 n_2 \dots n_k - 1)\}$ leží právě jedno řešení. Další řešení jsou s ním modulo N kongruentní.

1. Hledané číslo x se pokusíme zkonstruovat jako součet tří[14] čísel $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
$$x = a + b + c$$

2. Zajistíme, aby při dělení pěti nenulový zbytek dával pouze první sčítanec, při dělení sedmi pouze druhý sčítanec a při dělení třemi pouze sčítanec třetí.

   Toho, aby po dělení pěti druhý a třetí sčítanec měly zbytky nula, můžeme docílit například takto:
$$x = a + 5b_1 + 5c_1; \quad b_1, c_1 \in \mathbb{Z}.$$

   Pro zajištění toho, aby první a třetí sčítanec při dělení sedmi měly nulové zbytky, postupujeme obdobně:
$$x \equiv 7a_1 + 5b_1 + 7 \cdot 5c_2; \quad a_1, c_2 \in \mathbb{Z}.$$

   Nakonec stejným způsobem zařídíme, aby při dělení třemi sčítanec první a druhý měl nulové zbytky:
$$x = 3 \cdot 7a_2 + 3 \cdot 5b_2 + 7 \cdot 5c_2; \quad a_2, b_2 \in \mathbb{Z}.$$

   Povšimněme si, že první sčítanec musí být násobkem tří a sedmi, druhý tří a pěti a poslední sedmi a pěti.

3. První sčítanec ve tvaru $3 \cdot 7 \cdot a_2$ je pro všechna a_2 dělitelný třemi i sedmi. Zbývá určit hodnotu a_2 tak, aby po dělení pěti byl jeho zbytek čtyři. Protože $3 \cdot 7 = 21$ a 21 má po dělení pěti zbytek jedna, bude stačit za a_2 zvolit číslo čtyři.

   Druhý sčítanec má po dělení sedmi dávat zbytek šest. Nyní je zbytek také jedna, neboť $3 \cdot 5 = 15$ a po dělení 15 sedmičkou zbývá jedna. Zvolme proto $b_2 = 6$.

   Potřebujeme, aby třetí sčítanec po dělení třemi dával zbytek jedna. Protože $7 \cdot 5$ po dělení třemi má zbytek dva, bude nutné nalézt takové číslo, aby platilo:
$$2c_2 \equiv 1 \pmod 3.$$

[14] Jde o soustavu tří kongruencí. Pokud by kongruencí bylo m, bylo by m také sčítanců.

Obě strany je třeba vynásobit číslem, které je vzhledem k násobení inverzním prvkem[15] k číslu dva (tedy $x \cdot a_2 = 1$). Nalézt inverzní prvek můžeme například pomocí *Eukleidova algoritmu*, ovšem vzhledem k tomu, že jej hledáme v tříprvkové množině, můžeme využít metodu „pokus – omyl“. Po dosazení všech prvků z modulo 3, kterými jsou 0, 1 a 2, zjišťujeme, že naši rovnici splňuje $c_2 = 2$.

4. Dosadíme do výrazu za hodnoty a_2, b_2 a c_3 zjištěné v bodu 3:

$$x = 3 \cdot 7 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 5 \cdot 2,$$

vynásobíme a posčítáme:

$$x = 244.$$

5. Dostali jsme počet mažoretek, které se snaží formaci utvořit. Nejsou ale i nějaká další řešení? Předpokládejme, že existuje jiné řešení b. Protože b má stejné zbytky po dělení pěti, sedmi a třemi jako již nalezené řešení, bude rozdíl těchto řešení dělitelný zároveň pěti, sedmi a třemi. Tento rozdíl tak můžeme zapsat jako $5 \cdot 7 \cdot 3n = 105n$. To znamená, že jediná možná další řešení získáme jako $244 + 105n$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

   Platí, že $244 \equiv 34 \pmod{105}$, což je nejmenší možný (kladný) počet mažoretek. Další řešení bychom tak dostali přičítáním[16] čísla 105 ke 34. Skutečně tedy, jak říká *Čínská věta*, platí, že řešení 34 je jednoznačné modulo 105.

Důkaz *Čínské věty* probíhá podobným způsobem, jako je veden výpočet řešení uvedeného příkladu a je popsán například v [Chi]. □

Řešení úlohy podobného typu, jako je úloha 2.2, může pomoci k řešení zadané olympiádní úlohy. *Čínská věta* má však i mnoho dalších využití. Ukážeme si ještě odlišný typ problémů, který nám věta umožňuje řešit.

Následující úloha na první pohled může působit dojmem, že nemá s tématem až tak mnoho společného, přesto je v ní schováno. Úloha dále demonstruje poměrně frekventovaný jev, kdy v matematice umíme určovat některé vlastnosti zkoumaného objektu, aniž bychom jej museli (nebo vůbec dokázali) konstruovat.

---

[15] Číslo a má inverzní prvek modulo n právě tehdy, když jsou a a n nesoudělná čísla. Inverzní prvek je takový prvek a^{-1}, pro který platí $a^{-1} \cdot a \equiv 1 \pmod{n}$.

[16] Řešení splňující soustavu kongruencí bychom získali i odečítáním čísla 105 od 34. Ovšem záporný počet mažoretek si dobře nezatančí...

Úloha 2.3. *Určete poslední dvě cifry čísla* 97^{63}.

Řešení. Nalézt poslední dvě cifry by samozřejmě šlo tak, že číslo skutečně umocníme. To je ale bez výpočetní techniky téměř nemožné, zejména však ale velmi nepříjemné. Zkusme se nejprve zamyslet nad tím, jak úloha souvisí se zbytkem po dělení. Podívejme se na poslední dvě cifry optikou dělitelnosti a zbytků – co reprezentují?

Ano, jedná se o zbytek po dělení stem. Úloha se tedy dá interpretovat následovně:

$$x \equiv 97^{63} \bmod (100).$$

Z *Čínské věty* již víme, že x je možným výsledkem nějaké soustavy kongruencí:

$$x \equiv 97^{63} \pmod{n_1},$$
$$x \equiv 97^{63} \pmod{n_2},$$

kde n_1 a n_2 jsou nesoudělná přirozená čísla, která v součinu dávají 100. Zvolme $n_1 = 4$ a $n_2 = 25$:

$$x \equiv 97^{63} \pmod{4},$$
$$x \equiv 97^{63} \pmod{25}.$$

Dále platí:

$$x \equiv 97^{63} \equiv 1^{63} \equiv 1 \pmod{4},$$
$$x \equiv 97^{63} \equiv (-3)^{63} \equiv (-27)^{21} \equiv (-2)^{21} \equiv (-128)^3 \equiv (-3)^3 \equiv$$
$$\equiv -2 \equiv 23 \pmod{25}.$$

Řešení této soustavy nalezneme stejným postupem, jaký je popsán v úloze 2.2, tedy jako součet nějakých celých čísel a a b. Zajistíme opět, aby první ze sčítanců při dělení čtyřmi měl zbytek jedna a druhý nula, zatímco při dělení 25 chceme, aby druhý ze sčítanců měl zbytek 23 a první sčítanec nula. Začneme jako u úlohy s mažoretkami:

$$x \equiv 25a_1 + 4b_1 \pmod{100},$$

a dále už jen zbývá nalézt hodnoty a_1 a b_1. Protože $25 \equiv 1$ modulo 4, zvolíme za $a_1 = 1$. U druhého sčítance je třeba se zamyslet více. Řešíme následující kongruenci:

$$4b_1 \equiv 23 \pmod{25}.$$

Opět můžeme zkoušet dosazovat[17] za b_1 přirozená čísla menší než 25. Protože však víme, že $4 \cdot 19 = 76 = 3 \cdot 25 + 1$, stačí obě strany kongruence vynásobit číslem 19:

$$\begin{aligned} 4b_1 &\equiv 23 \pmod{25}, \\ 19 \cdot 4b_1 &\equiv 19 \cdot 23 \pmod{25}, \\ b_1 &\equiv (-6)(-2) \equiv 12 \pmod{25}. \end{aligned}$$

Po dosazení a vyčíslení tak dostáváme:

$$x \equiv 25 \cdot 1 + 4 \cdot 12 = 73 \pmod{100}.$$

Poslední dvojčíslí čísla 97^{63} je tedy 73. □

Obdobným způsobem můžeme vyřešit i následující úlohu:

Úloha 2.4. *Najdi poslední trojčíslí součinu* $1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot 2017 \cdot 2021$.

Řešení. Hledáme x takové, aby platilo:

$$x \equiv 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot 2017 \cdot 2021 \pmod{1000}.$$

Protože v součinu jsou čísla 5, 25 a 45, je součin jistě dělitelný $5^3 = 125$. Navíc také platí, že $125 \cdot 8 = 1000$ a zároveň jsou čísla 125 a 8 nesoudělná, což požadujeme, aby soustava kongruencí měla řešení. Zvolme proto následující soustavu kongruencí:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot 2017 \cdot 2021 \pmod{125}, \\ x &\equiv 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot 2017 \cdot 2021 \pmod{8}. \end{aligned}$$

Víme, že součin je dělitelný 125. Proto pro první rovnici platí:

$$x \equiv 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot 2017 \cdot 2021 \equiv 0 \pmod{125}.$$

[17] Postupovat lze také takto:

$$\begin{aligned} 4b_1 &\equiv 23 \pmod{25}, \\ 4b_1 &\equiv -2 \pmod{25}, \\ 2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot b_1 &\equiv 2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot (-1) \cdot 2 \pmod{25}, \\ b_1 &\equiv (-1) \cdot 2^{-1} \pmod{25}, \end{aligned}$$

hledáme tedy inverzní prvek k dvojce. Víme, že $2 \cdot 13 \equiv 1 \pmod{25}$, proto:

$$b_1 \equiv (-1) \cdot 13 \equiv -13 \equiv 12 \pmod{25}.$$

Dostáváme tak $b_1 = 12$.

Druhou rovnici je možné přepsat takto:

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot 2017 \cdot 2021 \equiv \\
&\equiv 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 \pmod 8.
\end{aligned}
$$

V součinu se střídají jedničky a pětky. Pětek se v součinu vyskytuje 253, můžeme tedy pokračovat:

$$x \equiv 5^{253} \equiv (5 \cdot 5)^{126} \cdot 5 \equiv 1^{126} \cdot 5 \equiv 5 \pmod 8.$$

Další postup je shodný jako v předchozí dvojici příkladů:

$$x \equiv 125a_1 + 8b_1 \pmod{1000},$$

zařídili jsme, aby druhý sčítanec měl při dělení osmi zbytek nulový, a také aby po dělení 125 prvního sčítance byl zbytek nula. Zbývá nalézt hodnoty a_1 a a_2 tak, aby nenulové zbytky byly nula a pět. K tomu stačí zvolit $a_1 = 1$ a $a_2 = 0$:

$$x \equiv 125 \cdot 1 + 8 \cdot 0 \equiv 125 \pmod{1000}.$$

Poslední trojčíslí daného součinu je 125. □

Literatura

[Chi] Lindsay N. Childs: *A Concrete Introduction to Higher Algebra.* Undergraduate Texts in Mathematics. Third edition. New York: Springer, 2008. ISBN 978-0-387-74725-5.

[Ro] M. Rokyta: Modulární aritmetika. In: *Rozvíjení matematických talentů na středních školách I.* Praha: MatfyzPress, 2019, s. 27–32. ISBN 978-80-7378-426-3.

[Br] *Brilliant.* `https://brilliant.org/`

ČÍSLICE A OPERACE S NIMI

Luboš Pick

Čísla jsou základním stavebním kamenem matematiky a číslice jsou základním stavebním kamenem čísel. Malým zázrakem je, že všechna přirozená čísla, jichž je nekonečně mnoho, jsme schopni popsat pomocí pouhých deseti číslic. V matematických olympiádách se již tradičně objevují úlohy formulované pomocí číselného zápisu přirozených čísel. Tyto úlohy často obsahují některé oblíbené operace s číslicemi, jakými jsou například ciferný součet, alternující ciferný součet, ciferný součin a podobně. Často se ale objevují úlohy specifické a originální, které nelze snadno zařadit do nějaké kategorie a na které tudíž většinou neplatí žádný dobře definovaný a léty promrskaný postup, nýbrž vyžadují individuální přístup. Takovou úlohou je i 71-C-I-2 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Určete všechny čtveřice různých dvojmístných přirozených čísel, pro která zároveň platí:

1. *součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 2, je 80,*
2. *součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 3, je 90,*
3. *součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 5, je 60.*

V následujícím textu sice neuvedeme explicitně řešení uvedené úlohy, ale nebudeme od něj daleko. Pozorný čtenář by po jeho přečtení neměl mít potíže s vyřešením úlohy zadané.

1 Číselný zápis a techniky s ním spojené

Často se setkáváme s úlohami, jejichž zadání obsahuje nějaké informace o číselném zápisu hledaných čísel. Tato data mohou přitom být stanovena velice rozmanitými způsoby. Typickými příklady jsou: počet číslic hledaného čísla, parita, informace o tom, kolik specifických číslic zápis obsahuje („nalezněte všechna trojmístná čísla, jejichž číselný zápis obsahuje právě dvě osmičky“), informace o ciferném součtu, informace o dělitelnosti („nalezněte všechna sudá čtyřmístná čísla, jejichž ciferný součet při dělení jedenácti dává zbytek čtyři“), informace typu „co by se stalo, kdybychom škrtli ten a ten kus číselného zápisu“ a podobně.

Komplikovanější problémy pracují například s číselnými zápisy v jiné než desítkové soustavě a podobně.

Na podobné úlohy neexistuje žádný obecný algoritmus, nicméně osvojení některých základních technik se může hodit. Při řešení takových úloh bude skoro vždy potřeba použít velkou dávku heuristiky a velmi často se nevyhneme nepříliš vzrušujícímu rozboru případů. Naprosto nezbytné budou nejrůznější nerovnosti a odhady. Bude užitečné vědět něco o prvočíslech a o jednoznačnosti prvočíselného rozkladu přirozeného čísla. Dále rozhodně nebude na škodu si osvojit například základy teorie dělitelnosti ([Kr:19]), nejjednodušší triky s cifernými součty([Ja:19, Ja:20]), základy kombinatoriky, a může se též hodit modulární aritmetika ([Ro:19]).

Pro začátek si připomeňme, že v desítkové soustavě máme pro číselný zápis k dispozici deset číslic, které se ovšem netěší stejným privilegiím. Například nula by neměla stát na levé části číselného zápisu, ačkoli i toto všeobecně přijímané pravidlo má své výjimky, jak brzy uvidíme.

Za účelem malé rozcvičky, ilustrace studované problematiky, uvedení do světa úloh o číselných zápisech a hlavně vytvoření představy o jejich obtížnosti si nejprve vypůjčíme úlohu [C–56–K–4] z matematické olympiády.

Úloha 1.1. *Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N, z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k-krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N.*

Řešení. Nejprve vyjádříme zatím neznámé číslo N ve tvaru

$$N = a \cdot 10^n + b$$

pro nějaká přirozená čísla n, b, $b < 10^n$, a číslici a. Ze zadání úlohy vyplývá řetízek rovností

$$b \cdot k = N = a \cdot 10^n + b,$$

tedy

$$b \cdot (k-1) = a \cdot 10^n.$$

Odtud již sice snadno obdržíme vzoreček pro hledané číslo b, a to

$$b = \frac{a \cdot 10^n}{k-1}, \tag{1.1}$$

nesmíme přitom ale zapomenout, že b musí být přirozené číslo. Potřebujeme tudíž ohlídat, aby čitatel v posledním výrazu byl dělitelný jmenovatelem. V tomto okamžiku je na místě se rozpomenout, že hledané číslo k má být dvojmístné, a hlavně že nás zajímá *největší* takové číslo. Nejrychlejší bude jej nalézt ručně, přičemž budeme postupovat od největší přípustné hodnoty (tedy od $k = 99$) směrem dolů, dokud na něco nenarazíme. Je-li $k = 99$, pak

$$k - 1 = 98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7^2.$$

Nalezneme přirozené číslo n a číslici a tak, aby $2 \cdot 7^2$ dělilo $a \cdot 10^n$? Těžko. Výraz a je jen číslice, a výraz 10^n nám nepomůže vůbec. Pojďme tedy o patro níže. Pro $k = 98$ je situace ještě horší, protože $k-1 = 97$ je dokonce prvočíslo, které rozhodně nemůže být dělitelem výrazu $a \cdot 10^n$ bez ohledu na hodnoty a a n. Naše úsilí bude ovšem odměněno již v následujícím kroku. Položme $k = 97$. Potom

$$k - 1 = 96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 2^5.$$

Nyní není problém nalézt velkou zásobu různých a a n tak, aby $3 \cdot 2^5$ dělilo $a \cdot 10^n$, mějme však na paměti, že nás zajímá *nejmenší* číslo N. Kam schováme pět mocnin dvojky? Do číslice a bychom teoreticky mohli vetknout až třetí mocninu dvojky, jenomže pak by nám nezbyl prostor pro trojku. Bohužel ani s druhou mocninou dvojky nepochodíme, a tedy po krátké úvaze vidíme, že bude třeba položit $a = 6$ a faktor 10^n využít jako odkladiště pro zbývající čtyři mocniny dvojky. Odtud snadno plyne, že nejmenší možná volba n je $n = 4$. Z (1.1) vyplývá, že

$$b = \frac{6 \cdot 10^4}{96} = \frac{60000}{96} = 625,$$

a tedy

$$N = 6 \cdot 10^4 + 625 = 60625.$$

Výsledek: $k = 97$, $N = 60625$. □

Další příhodné techniky procvičíme na úloze [C–56–S–1].

Úloha 1.2. *Určete počet všech čtyřmístných přirozených čísel, která jsou dělitelná šesti a v jejichž zápisu se vyskytují právě dvě jedničky.*

Řešení. Hledané číslo $\overline{abcd}$ je sudé, tedy $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Číslo je dělitelné třemi, takže i jeho ciferný součet je dělitelný třemi. Dvě z číslic a, b, c, jsou jedničky a zbývající číslice je různá od jedničky. Je-li

$d \in \{0, 6\}$, pak je zbývající číslice kongruentní jedničce modulo 3, a tedy je to jedna z číslic $\{4, 7\}$ (pozor, nemůže být rovna jedné!). Volba $d = 0$ takto vede k šesti možnostem, konkrétně

$$1140,\ 1410,\ 4110,\ 1170,\ 1710,\ 7110.$$

K obdobným šesti možnostem vede i volba $d = 6$ (jen vyměníme nulu za šestku). Je-li $d \in \{2, 8\}$, pak je zbývající číslice $\equiv 2 \pmod 3$, tedy je to jedna z číslic $\{2, 5, 8\}$, a dostaneme dalších osmnáct možností. Konečně je-li $d = 4$, pak je zbývající číslice $\equiv 0 \pmod 3$, tedy je to jedna z číslic $\{0, 3, 6, 9\}$. Teď musíme mírně zvýšit opatrnost – pro každou z nenulových voleb dostáváme opět tři možnosti, celkem tedy devět, pro nulu ale jen dvě (čtenář nechť sám určí, proč).

Výsledek: 41. □

2 Úlohy návodné a úlohy obdobné

K řešení problémů podobným soutěžní úloze se mohou hodit úvahy objevující se v řešení následujícího problému.

Úloha 2.1. *Určete všechny skupiny dvojmístných přirozených čísel, pro které zároveň platí:*

1. *číselný zápis každého z nich obsahuje sedmičku,*
2. *jejich součet je roven* 84.

Řešení. Na rozdíl od soutěžní úlohy zde nemusí být použitá čísla nutně různá a některá se tedy mohou vyskytnout vícekrát. A hlavně na rozdíl od zadané úlohy zde nevíme, kolik jich je. (Je zřejmé, že jich bude konečně mnoho, toto pozorování ale žádný podstatný pokrok nepředstavuje.) Mnohem zajímavější (a užitečnější pro náš útok na další úlohy) bude, povšimneme-li si, že sedmička nemůže u žádného z čísel stát na místě desítek. Proč? Předpokládejme, že jedno z čísel je tvaru $\overline{7a}$, tedy je rovno $7 \cdot 10 + a$, kde $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Bez ohledu na hodnotu a se nám určitě nepodaří splnit podmínku $\overline{7a} = 84$, a tedy musíme do součtu přihodit ještě nejméně jeden sčítanec, řekněme $\overline{bc}$, abychom vyhověli druhé podmínce ze zadání. Jenomže nejmenší dvojmístné přirozené číslo obsahující sedmičku je 17, takže musí platit $\overline{bc} \geq 17$. To ale znamená, že $\overline{7a} + \overline{bc} \geq 70 + 17 = 87$, a to je příliš. Protože přidávání dalších čísel do součtu může situaci jen zhoršit, plyne odtud, že sedmička se může vyskytovat pouze na jednotkové pozici.

Jako další krok odvodíme, kolik sčítanců se bude v součtu vyskytovat. Z prvního kroku vyplývá, že všechny sčítance mají sedmičku na jednotkové pozici (jsou dvojmístné, obsahují sedmičku, a ta nemůže stát na pozici desítkové). Jejich součet má končit čtyřkou. Odtud plyne, že jejich počet musí být kongruentní dvojce modulo 7. Kdyby jich bylo více než dva, pak by nejmenší možná hodnota jejich součtu byla rovna hodnotě $9 \cdot 17$, což je o hodně více než 84. Tedy každá skupina vyhovující zadání úlohy obsahuje dva sčítance.

No a nyní již nemáme nic lepšího než již jednou zmíněný (a také jednou použitý) rozbor případů. S jeho pomocí snadno odvodíme odpověď.

Výsledek: $\{(17, 67); (27, 57); (37, 47)\}$. □

Laskavý čtenář nechť si sám zkusí ověřit, že vyměníme-li v zadání úlohy 2.1 hodnotu 84 za 85, pak jediným řešením je homogenní pětice $(17, 17, 17, 17, 17)$, a jestliže použijeme dokonce hodnotu 86, pak úloha nemá řešení vůbec.

A nyní se nacházíme v situaci, kdy bychom si již mohli zkusit vyřešit problémek podobný soutěžní úloze.

Úloha 2.2. *Určete všechny čtveřice různých dvojmístných přirozených čísel, pro které zároveň platí:*

1. *součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 1, *je* 72,
2. *součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 4, *je* 102,
3. *součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 7, *je* 64.

Řešení. Naším prvním krokem by měla být optimalizace řešení. Kde začít? Zatímco z první informace v zadání toho mnoho nevyčteme (způsobů, jak dostat 72 pomocí čísel obsahujících jedničky je spousta), třetí položka je v tomto smyslu mnohem štědřejším zdrojem informací. Vyjděme tedy odtud.

To, že se sedmička nemůže u žádného čísla nacházet na desítkové pozici, je opět pravda, tentokrát je to ale výsledkem mnohem jednodušší úvahy, než jsme potřebovali v úloze 2.1, a čtenář si ji jistě rád provede sám. Jako další bod programu, obdobně jako v řešení úlohy 2.1, odvodíme, že čísla obsahující sedmičku, musí být právě dvě, a to buď $(17, 47)$, nebo $(27, 37)$. Vcelku snadno odvodíme, že dvojice $(27, 37)$ nevyhovuje, protože si nemůžeme dovolit vyplýtvat dvě čísla, aniž by se v jejich zápisu objevila čtyřka. I kdyby totiž zbývající dvě čísla obsahovala čtyřku na obou pozicích, součtu 102 bychom nedosáhli. A to ani nemluvíme o tom, že by jednička pěkně ostrouhala. Takže dvě ze čtyř hledaných čísel musí být 17 a 47 a zbývá dopočítat zbylá dvě.

Kdyby číselný zápis některého ze zbývajících čísel neobsahoval jedničku, pak není možné splnit první podmínku zadání, neboť součet všech čísel obsahujících jedničky by buď nekončil předepsanou dvojkou, nebo by nedosáhl požadované výše. Obě zbývající čísla tedy mají jedničku ve svém číselném zápisu. Obdobnou úvahou odvodíme, že číselný zápis obou těchto čísel obsahuje čtyřku. Nepříliš složitým rozborem případů pak dojdeme k výsledku.

Výsledek: $\{(14, 17, 41, 47)\}$. □

Literatura

[Ja:19] A. Jančařík: *Čísla, číslice a ciferné součty.* Rozvíjení matematických talentů na středních školách I, MatfyzPress, Praha, 2019, str. 101–106. ISBN 978-80-7378-399-0.

[Ja:20] A. Jančařík: *Ciferný součet.* Rozvíjení matematických talentů na středních školách II, MatfyzPress, Praha, 2020, str. 89–92. ISBN 978-80-7378-425-6

[Kr:19] J. Krejčí: *Dělitelnost.* Rozvíjení matematických talentů na středních školách I, MatfyzPress, Praha, 2019, str. 79–84. ISBN 978-80-7378-399-0

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

[Ro:19] M. Rokyta: *Modulární aritmetika.* Rozvíjení matematických talentů na středních školách I, MatfyzPress, Praha, 2019, str. 27–32. ISBN 978-80-7378-399-0

LEVELY V PLANIMETRII

Alena Jechumtál Skálová

Při řešení mnoha planimetrických úloh hraje podstatnou roli správný náčrtek. Ačkoliv sám o sobě neslouží jako důkaz, často nám pomůže si ujasnit, jaké vztahy mezi body/úsečkami/trojúhelníky/... platí.

V příspěvku se podíváme na zdánlivě primitivní trik – nakreslit si „správnou“ přímku vodorovně a porovnávat, jak „vysoko“ „nad ní“ či „pod ní“ jsou jednotlivé body. Neboli na jakém *levelu* od vodorovné přímky se body nacházejí. V závěru se ještě podíváme, jak propojit levely a poměry obsahů.

Úlohou, s jejímž rozlousknutím nám optika *levelů* může pomoci, je i 71-C-I-3 matematické olympiády. Její zadání zní:

Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC jsou dány body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, uvnitř strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojúhelník vymezený úsečkami AE, GD, BF. Dokažte, že poměr obsahu tohoto trojúhelníku a obsahu trojúhelníku ABC má jedinou možnou hodnotu, a určete ji.

Upozorňujeme, že pojem *level* ani značení použité v příspěvku není ustálené. V případě, že sepisujete úlohu v olympiádě či jinde, doporučujeme jej vždy vysvětlit. Případně využít z příspěvku dovednost „nakreslit si správnou přímku vodorovně a objevit díky tomu kýžené podobnosti“ a samotný důkaz opřít přímo o podobnosti trojúhelníků, které se beztak v jádru celé myšlenky *levelů* skrývají.

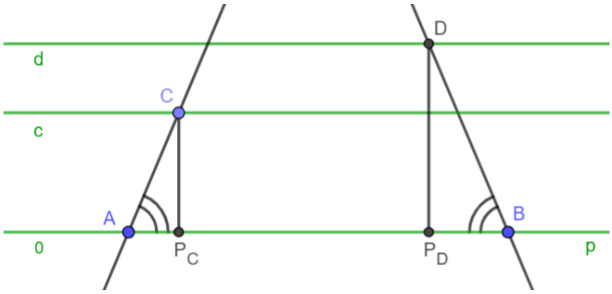
1 Levely

Značení 1.1. Mějme danou přímku p, v náčrtku doporučujeme nakreslit si ji vodorovně. *Level* bodu vůči této přímce definujeme jako vzdálenost tohoto bodu od přímky p, přičemž jej budeme značit malým písmenem. Tedy pro bod A budeme jeho *level* značit malým a, *level* bodu B malým b a tak dále.

Platí následující lémma.

Lémma 1.2. *Mějme přímku p (načrtněme ji vodorovně) a čtveřici bodů A, B, C, D takovou, že právě A a B leží na přímce p a zároveň AC a BD svírají s p úhel stejné velikosti. Pak platí $c : d = |AC| : |BD|$.*

Důkaz. Projděme si nově zavedené pojmy s náčrtkem.[18] Nechť jsou všechny zeleně nakreslené přímky v následujícím obrázku rovnoběžné s p a procházejí bodem C, respektive D. Označme P_C a P_D paty kolmic z příslušného bodu na p.



Pak level C vůči p není nic jiného než $|CP_C|$, značíme jej c. Podobně level D k p značíme d a je roven $|DP_D|$. Kdybychom z nějakého důvodu chtěli určit i levely bodů A a B, tak pro oba shodně vycházejí nulové.

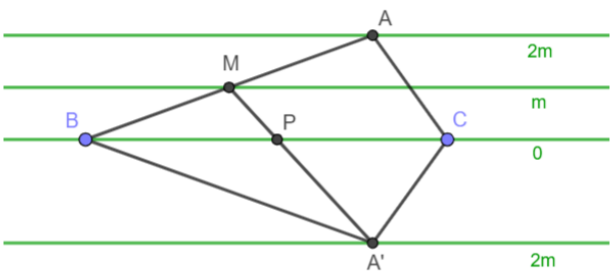
Jelikož úhly P_CAC a P_DBD jsou shodné (klíčová vlastnost), jsou trojúhelníky AP_CC a BP_DD podobné, tudíž

$$|AC| : |BD| = |CP_C| : |DP_D| = c : d.$$

Tím je lémma dokázáno. □

Úloha 1.3. *Je dán trojúhelník ABC. Označme zrcadlový obraz A podle BC jako A' a střed strany AB jako M. Dále označme P průsečík $A'M$ a BC. Víme-li, že $|PM| = 3$ cm, jakou délku má $|PA'|$?*

Řešení. Načrtněme si celou situaci tak, aby přímka BC byla vodorovně, a k ní budeme vztahovat všechny levely.



[18] V náčrtku jsme zvolili variantu, že AC není rovnoběžná s BD. Opačný případ bychom dokázali stejným postupem.

Jelikož M je středem AB, platí $a : m = 2 : 1$. Tedy M je na levelu o hodnotě m a A na levelu $2m$. Ze zadání je bod A' od BC stejně daleko jako A, jeho level je tedy rovněž $2m$, pouze v opačné polorovině. Odtud již dostáváme, že $|MP| : |PA'| = 1 : 2$, tudíž $|PA'| = 6$ cm. □

Poznámka 1.4. *Zkuste si samostatně přeformulovat řešení předchozí úlohy bez pojmu* level*, tedy s poměry konkrétních délek úseček.*

Matematicky se jedná o totéž – celý trik levelů je jen ve způsobu, jak na planimetrické úlohy o poměrech nahlížet z jiného úhlu pohledu.

Následují úlohy k samostatnému procvičení; na konci této kapitoly jsou k nim nápovědy.

Úloha 1.5. *Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC. Na stranách AB a AC najdeme postupně body K a L tak, že $|BK| = \frac{1}{3}|CL|$ a $|KL| = 6$ cm. Označme P průsečík KL s přímkou BC. Určete délku $|PK|$.*

Úloha 1.6. *Je dán trojúhelník ABC. Na stranách AB a AC najdeme postupně body K a L tak, že $|AK| : |AB| = 1 : 3$ a $|AL| : |AC| = 1 : 4$. Buď M střed úsečky KL. Dále AM protne BC v bodě N. Určete poměr $|AM| : |AN|$.*

Úloha 1.7. *V trojúhelníku ABC označme D průsečík BC a osy úhlu BAC. Ukažte, že platí*

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Úloha 1.8. *Buď ABC obecný trojúhelník*[19] *a označme D průsečík přímky BC a osy vnějšího úhlu u vrcholu A. Dokažte, že platí*

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Nápovědy k úlohám

Pro úlohu 1.5: BC vodorovně

Pro úlohu 1.6: BC vodorovně

Pro úlohu 1.7: osu úhlu vodorovně a srovnejme levely B a C

Pro úlohu 1.8: osu vnějšího úhlu u A vodorovně a srovnejme levely B a C

[19] Tedy nemající žádné dva úhly shodné.

2 Obsahy

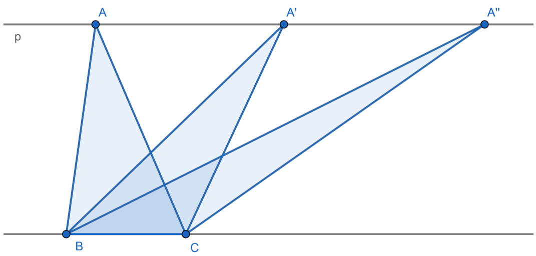
Podívejme se ještě na jedno jednoduché, leč praktické lémma (lémma 2.1) o obsahu trojúhelníku a jak jej využít v úloze o poměru obsahů.

Obsah trojúhelníku ABC se dá spočítat pomocí délky strany a jí příslušející výšky jako

$$S(ABC) = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}.$$

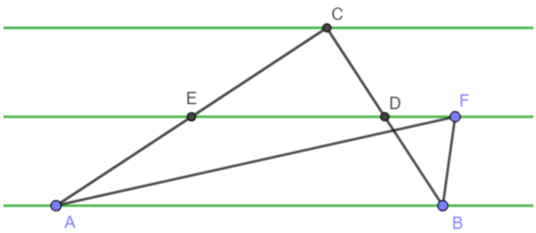
Ze skutečnosti, že $S(ABC)$ nezávisí na přesné poloze bodu C (vzhledem k A, B), ale pouze na *vzdálenosti* C od přímky určené úsečkou AB plyne následující pozorování.

Lémma 2.1. *Ke straně BC trojúhelníku ABC veďme rovnoběžku p procházející bodem A. Pak pro každý bod A' ležící na p platí, že $S(A'BC) = S(ABC)$.*



Úloha 2.2. *Mějme trojúhelník ABC. Označme D a E postupně středy stran BC a AC. Na přímce určené úsečkou DE zvolme libovolný bod F. Dokažte, že poměr obsahu trojúhelníků ABF a ABC má jedinou možnou hodnotu.*

Řešení. Načrtněme si ABC tak, aby AB byla vodorovně. Jelikož DE je střední příčka trojúhelníku ABC, je DE rovnoběžná s AB, tedy všechny tři body na ní ležící (D, E, F) jsou od přímky AB na stejném levelu. Tudíž podle lémmatu 2.1 platí $S(ABF) = S(ABE) = S(ABD)$.



Bod D půlí úsečku BC, pro levely bodů C a D vzhledem k přímce AB tudíž platí $c : d = 2 : 1$. Obsah $S(ABD)$ není nic jiného než $d \cdot |AB|$, podobně $S(ABC) = c \cdot |AB| = 2d \cdot |AB| = 2S(ABD) = 2S(ABF)$. Pročež bez ohledu na polohu bodu F na přímce ED je poměr obsahů $S(ABC) : S(ABF)$ konstantně roven $2 : 1$. $\square$

Literatura

[TP] Matematický korespondenční seminář MFF UK (MKS), přednáška Tomáše Pavlíka *Levely a Menelaova věta*. Dostupné z: `https://prase.cz/library/LevelyAMenelausTP/LevelyAMenelausTP.pdf`.

KOMBINATORICKÉ KONSTRUKCE A ODHADY

Filip Čermák

Při řešení kombinatorické úlohy, kde se po nás chce maximální či minimální hodnota nějaké veličiny, je dobré vědět, že musíme udělat dva kroky. Představme si tyto dva kroky pro maximum. U úloh s maximem potřebujeme udělat horní odhad, vetšinou pomocí barvení, dvojího počítání atd. a spodní odhad je pak dán konstrukcí. Pokud najdeme konstrukci s hodnotou pro horní odhad, tak jsme vyhráli. Pokud ne, musíme zlepšit horní odhad, či konstrukci. Pro minimum jsou kroky analogické a ukážeme si je později na příkladech. Kombinatorickou úlohou, kde se s problémem maximalizace setkáme, je také 71-C-I-4 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Tabulka 10×10 *je vyplněna čísly* 1 *a* -1 *tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven nule a zároveň součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven nule. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce.*

V tomto textu se budeme zabývat úlohami s podobnou tématikou a budeme si postupně zkoušet horní i dolní odhady na maximum či minimum.

1 Šachovnice

Na rozehřátí si ukážeme pár úloh, kde nám půjde o umístění nějakého typu figurek na šachovnici. První lehce připomeneme šachová pravidla. Figurky se ohrožují, pokud jedna může dosáhnout políčka druhé na jeden tah. *Věž* se může pohybovat libovolně daleko ve směru rovnoběžném se stranou hrací desky. *Kůň* se pohybuje do tvaru „L“ o velikosti delší strany 3 a kratší 2 a *král* je figurka, která se pohybuje o 1 ve vodorovném, svislém, či diagonálním směru.

Úloha 1.1. *Na klasickou šachovnici* 8×8 *chceme postavit co nejvíce věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly.*

Řešení. Pokud postavíme věž na libovolné pole (i, j), pak již žádná věž nemůže stát jak na i-tém řádku, tak na j-tém sloupci. To znamená, že každá věž nám zabere jeden řádek i sloupec, kde již žádná jiná věž nemůže být. Náš horní odhad je tedy 8, protože v každém řádku může být maximálně 1 věž.

Již máme horní odhad, nyní se k němu potřebujeme dostat zespoda konstrukcí. To zvládneme třeba tak, že umístíme 8 věží na jednu z hlavních diagonál. □

Vidíme, že konstrukce v našem řešení byla docela přímočará. Ač to tolik nesouvisí s naším tématem, tak by nás mohlo zajímat, kolik je takových konstrukcí s osmi navzájem se neohrožujícími věžemi. Pro případnou kontrolu je výsledek 40 320.

Úloha 1.2. *Kolik maximálně koní můžeme postavit na standardní šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali.*

Řešení. Nyní už nebude tolik přímočaré udělat horní odhad, proto můžeme začít s tím spodním. Po chvíli přemítaní nad touto úlohou zjistíme, že pokud dáme koně na bílé pole, ohrožuje pouze pole černá a naopak. Proto pokud dáme koně jen na bílá pole, umístíme jich 32, tak aby se žádní dva neohrožovaly. Pokud bychom do této konfigurace přidali koně na libovolné černé pole, tak budeme mít ohrožující se koně. Proto se zatím spokojíme se spodním odhadem 32 a zkusíme k němu naopak přiblížit ten horní.

Říci, jaký je horní odhad pro celou šachovnici 8×8 je dosti náročné. Proto je velmi dobrý základní trik, a to rozdělit si tabulku na menší části a o nich říci, kolik se do nich vejde nejvíce koní. Nabízí se vzít si např. čtverec 1×1 nebo 2×2 jako nejjednodušší případy, ale bohužel žádní dva koně se v takových podtabulkách neohrožují, takže to není zajímavý případ.

Proto zkusíme přirozeně nějakou podtabulku, která má velikosti stran, které dělí 8 (velikost šachovnice), protože ty se dají dobře naskládat do šachovnice. Nabízí se například tabulka 4×2, která je dost malá na to, aby se dalo jednoduše zjistit, kolik se do nich vejde nejvíce koní a zároveň by mohla dát dostatečný odhad, jelikož se v ní už mohou koně ohrožovat.

Proto se podívejme, kolik koní do obdélníku 4×2 umíme dát. Po chvíli hraní zjistíme, že jich tam opravdu 5 nedáme. Důvod je jednoduchý. Pokud položíme koně na libovolné pole této podtabulky, tak bude ohrožovat právě jedno jiné pole této podtabulky a zároveň žádní dva koně na této podtabulce neohrožují stejné pole této podtabulky. Z toho už nutně plyne, že pokud do této podtabulky dáme 4 koně, pak už budeme mít 4 ohrožovaná místa a 4 zabraná místa. Neboli nikdy zde nedáme více než 4 koně.

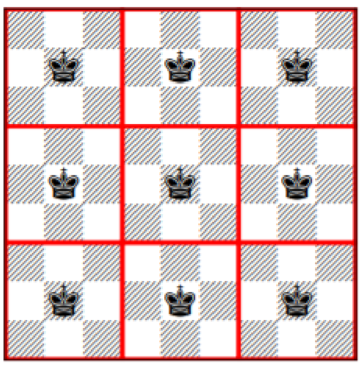
Nyní už stačí přímočaře rozdělit šachovnici na obdélníky 4×2, kterých bude 8, a do každého dáme maximálně půlku koní. Neboli můžeme použít nanejvýš $8 \times 4 = 32$ koní, což je to, co jsme chtěli dokázat. □

Je důležité si uvědomit, že dva kroky, které jsme zatím vždy udělali, tedy horní a spodní odhad jsou opravdu separátní. Při konstrukci se snažíme dané figurky naskládat nějak chytře, takže využíváme nejlepší rozestavění, které nás napadne. Naopak při horním odhadu se zabýváme případem, kdy nám protivník dá libovolnou konfiguraci a my si stejně musíme poradit. Tedy nespoléháme na konkretní rozestavění, ale na nějakou jeho obecnou vlastnost.

Úloha 1.3. *Jaký minimální počet králů musíme umístit na šachovnici o rozměrech* 9×9 *tak, aby společně ohrožovali všechna pole?*

Řešení. Nyní si konečně zkusíme i analogii pro minimální hodnotu králů na šachovnici. Nyní nám tedy konstrukce dává horní odhad, zatímco analýza obecné situace spodní odhad. Začněme konstrukcí, která nám pomůže udělat i spodní odhad. Podívejme se na obrázek 1. Zde máme devět králů, kteří ohrožují celou šachovnici.

Můžeme si všimnout, že je šachovnice rozdělená do devíti červených čtverečků 3×3, kde musíme mít alespoň jednoho krále, jinak by nebylo ohroženo prostřední políčko daného červeného podčtverečku. Proto je devět králů spodním i horním odhadem.



Obrázek 1: Devět králů, kteří stačí.

□

2 Příklady na procvičení

Ještě tady uvedu pár příkladů, které si může čtenář zkusit doma sám. Pokud by si čtenář s něčím nevěděl rady, tak se mi může ozvat na mail fila@kam.mff.cuni.cz.

Úloha 2.1. *Na začátku vojenské přehlídky se* 81 *vojáků rozestavilo na šachovnici* 9×9*, na každé políčko právě jeden. Po zaznění rozkazu každý z nich přešel na některé sousední políčko stejné barvy. Minimálně kolik míst zůstalo prázdných?*

Úloha 2.2. *Vyřešte úlohu 1.3 pro šachovnici* 7×7 *nebo* 8×8 *nebo obecně* $n \times n$*.*

Literatura

[ÚNŠ] P. Korcsok: *Úlohy na šachovnici.* Matematický korespondenční seminář, dostupné z: `https://prase.cz/library/KombinatorikaNaSachovniciPK/KombinatorikaNaSachovniciPK.pdf`

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

[RT] Z. Halas, Z. Šír (ed.): *Rozvíjení matematických talentů na středních školách II*, MatfyzPress, Praha, 2020. ISBN 978-80-7378-425-6. Dostupné z: `https://mg.karlin.mff.cuni.cz/?page=matsta`

SINOVÁ VĚTA A PŘENÁŠENÍ VZDÁLENOSTÍ

Martin Raška

V následujícím textu si ukážeme dvě různé techniky pro řešení olympiádních geometrických úloh. V první kapitole se zaměříme na sinovou větu, v druhé se naopak podíváme na přenášení vzdáleností v geometrických úlohách. Tato na první pohled dvě zdánlivě nesouvisející témata představují dva odlišné směry, jak se na úlohy se vzdálenostmi dívat – obě umí být elegantní i efektivní a umí se i navzájem doplňovat. Text je zamýšlen jako pomocný k úloze 71-C-I-5 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř jeho strany AB bod D. Na polopřímce opačné k BC uvažme bod E takový, že $|CD| = |DE|$. Dokažte, že platí $|AD| = |BE|$.

1 Sinová věta

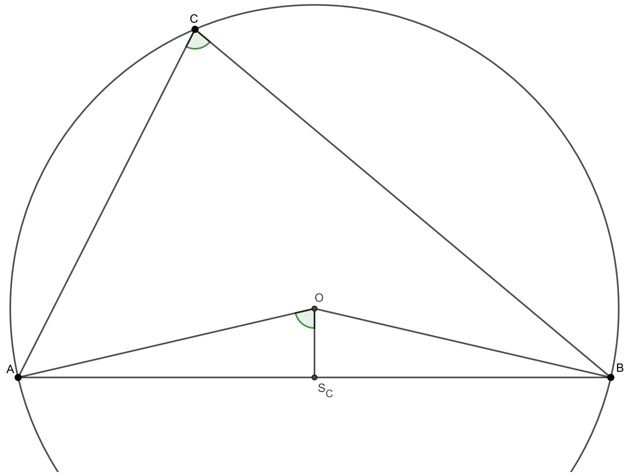
V této sekci si ukážeme takzvanou *sinovou větu*, která dává v trojúhelníku do souvislosti délky stran se siny protějších úhlů.

Věta 1.1. *Pro každý trojúhelník ABC s poloměrem R kružnice opsané platí*
$$\frac{|BC|}{\sin(|\sphericalangle BAC|)} = \frac{|CA|}{\sin(|\sphericalangle CBA|)} = \frac{|AB|}{\sin(|\sphericalangle ACB|)} = 2R\,.$$

Důkaz. Důkaz si pro jednoduchost předvedeme pouze pro ostroúhlý trojúhelník za pomocí věty o obvodovém a středovém úhlu. Důkaz pro tupoúhlý trojúhelník se provede velmi podobně.

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Protože uvažujeme ostroúhlý trojúhelník, tak leží v jeho vnitřku.

Uvažujme rovnoramenný trojúhelník AOB, střed AB označme S_C. Z věty o obvodovém a středovém úhlu platí $|\sphericalangle AOB| = 2|\sphericalangle ACB|$, tudíž $|\sphericalangle AOS_C| = |\sphericalangle ACB|$.



Z definice sinu tak v pravoúhlém trojúhelníku AOS_C platí

$$\sin(|\sphericalangle ACB|) = \sin(|\sphericalangle AOS_C|) = \frac{|AS_C|}{|AO|} = \frac{|AB|}{2R}\,,$$

což jsme přesně chtěli. Analogickým způsobem dostaneme příslušný poměr i pro zbylé dvě strany. □

V typické aplikaci sinové věty použijeme jenom jednu z prvních třech rovností – vybereme si ve zvoleném trojúhelníku dvě strany a jim příslušné protější úhly a sinová věta nám řekne, že poměr těchto dvou stran je stejný jako poměr sinů příslušných úhlů.

Tento přístup nám tedy v geometrické konfiguraci dává do vztahu délky a úhly a může být velmi užitečný, obzvlášť pokud najdeme několik trojúhelníků s podobnými délkami stran či shodnými úhly.

Jednoduchou aplikací sinové věty je následující známý poměr, ve kterém půlí osa úhlu protější stranu:

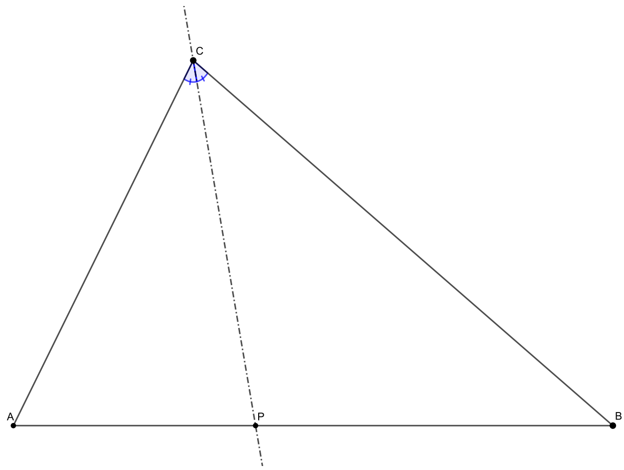
Úloha 1.2. *Mějme trojúhelník ABC, průsečík osy úhlu ACB se stranou AB označme P. Dokažte, že $\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.*

Řešení. Ze sinové věty použité na trojúhelník ACP dostaneme

$$\frac{|AP|}{\sin(|\sphericalangle ACP|)} = \frac{|AC|}{\sin(|\sphericalangle CPA|)}\,.$$

Pro trojúhelník BCP dostaneme analogicky

$$\frac{|BP|}{\sin(|\sphericalangle BCP|)} = \frac{|BC|}{\sin(|\sphericalangle CPB|)}\,.$$



Jelikož jsou úhly $\sphericalangle ACP$ a $\sphericalangle BCP$ shodné a úhly $\sphericalangle CPA$ a $\sphericalangle CPB$ se doplňují do $180°$, tak platí

$$\sin(|\sphericalangle ACP|) = \sin(|\sphericalangle BCP|) \quad \text{a} \quad \sin(|\sphericalangle CPA|) = \sin(|\sphericalangle CPB|)\,.$$

S touto znalostí pak už porovnáním vztahů vzniklých ze sinových vět jednoduše dostaneme rovnost ze zadání. □

Ukážeme si ještě jedno podobné použití sinové věty na lehce komplexnější úloze.

Úloha 1.3. *Je dán trojúhelník ABC, střed strany BC označme M. Nechť na straně AB leží bod P. Označme Q průsečík AM a PC. Dokažte, že $|CQ| = |AB|$ právě tehdy, když $|AP| = |PQ|$.*

Řešení. Naším cílem bude dostat se opakovaným použitím sinových vět k rovnosti $\frac{|CQ|}{|AB|} = \frac{|QP|}{|AP|}$, což bude implikovat ekvivalenci ze zadání.

Použitím sinové věty na trojúhelník ABM dostaneme

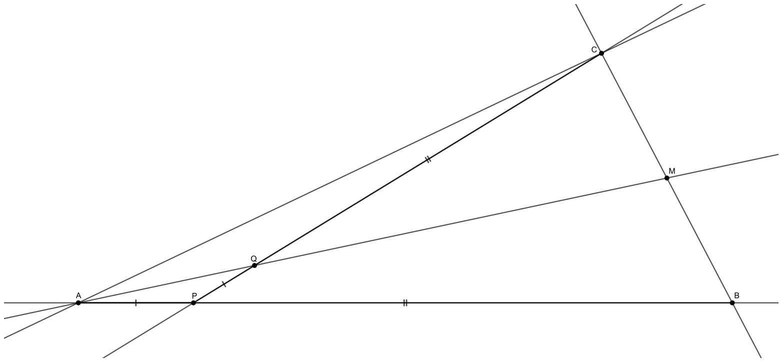
$$\frac{\sin(|\sphericalangle AMB|)}{|AB|} = \frac{\sin(|\sphericalangle BAM|)}{|MB|}\,,$$

z trojúhelníku CMQ získáme

$$\frac{\sin(|\sphericalangle CMQ|)}{|CQ|} = \frac{\sin(|\sphericalangle MQC|)}{|MC|}\,.$$

Tím jsme dostali do vztahu délky $|AB|$ a $|CQ|$. Délky $|AP|$ a $|QP|$ získáme z trojúhelníku APQ ve vztahu

$$\frac{\sin(|\sphericalangle AQP|)}{|AP|} = \frac{\sin(|\sphericalangle PAQ|)}{|QP|}\,.$$



Vyjádřením z druhé a třetí rovnosti dostaneme

$$\sin(|\sphericalangle PAQ|) = \frac{\sin(|\sphericalangle AQP|) \cdot |QP|}{|AP|}$$

a

$$\sin(|\sphericalangle CMQ|) = \frac{\sin(|\sphericalangle MQC|) \cdot |CQ|}{|MC|}\,.$$

Nyní si již stačí uvědomit, že úhly BAM a PAQ jsou stejné, takže $\sin(|\sphericalangle PAQ|) = \sin(|\sphericalangle BAM|)$. Podobně úhly AMB a CMQ se doplňují do $180°$, takže $\sin(|\sphericalangle AMB|) = \sin(|\sphericalangle CMQ|)$. Dosazením do levé a pravé strany první rovnosti dostaneme

$$\frac{\sin(|\sphericalangle AMB|)}{|AB|} = \frac{\sin(|\sphericalangle CMQ|)}{|AB|} = \frac{\sin(|\sphericalangle MQC|) \cdot |CQ|}{|MC| \cdot |AB|}\,,$$

$$\frac{\sin(|\sphericalangle BAM|)}{|MB|} = \frac{\sin(|\sphericalangle PAQ|)}{|MB|} = \frac{\sin(|\sphericalangle AQP|) \cdot |QP|}{|AP| \cdot |MB|}\,.$$

Pokud tyto výrazy dáme do rovnosti, tak po krácení (za pomocí $\sin(|\sphericalangle MQC|) = \sin(|\sphericalangle AQP|)$ a $|MC| = |MB|$) dostaneme

$$\frac{|CQ|}{|AB|} = \frac{|QP|}{|AP|}\,,$$

což jsme přesně chtěli. □

2 Přenášení vzdáleností

V této části se krátce podíváme na další velmi užitečný geometrický trik, a tím je dokreslování bodů, které nejsou v zadání zmíněny. Tyto body volíme tak, aby dobře korespondovaly s tím, co už v konfiguraci máme.

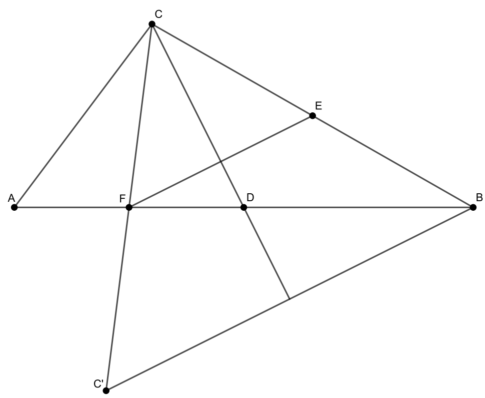
Často tak, aby měly od nějakých jiných bodů v konfiguraci vzdálenost, která se již jinde vyskytuje – podle toho i název kapitoly „Přenášení vzdáleností“. Tím nám v obrázku mohou vzniknout nové rovnoramenné trojúhelníky či kružnice a úloha se tím může velmi vyjasnit.

Předvedeme si to na dvou úlohách z minulých ročníků matematické olympiády.

Úloha 2.1. *Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF.*

(68-C-S-3)

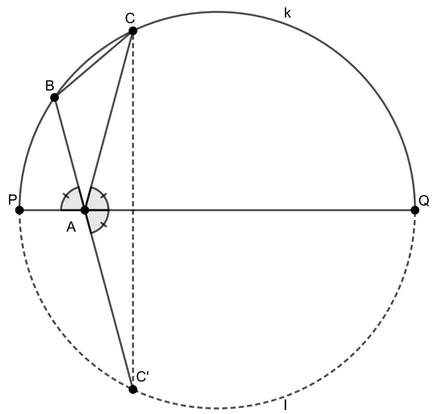
Řešení. Sestrojme bod C' jako obraz bodu C ve středové souměrnosti se středem F. Bod F je tak středem CC' a úsečka FB těžnicí v trojúhelníku CBC'. Bod D je poté těžištěm tohoto trojúhelníku, neboť dělí úsečku FB v poměru $2 : 1$. Z toho ovšem plyne, že na přímce CD leží těžnice z bodu C v trojúhelníku CBC', a tato přímka tak půlí jak stranu $C'B$, tak i FE jako střední příčku tohoto trojúhelníka. □



Úloha 2.2. *Je dána polokružnice k nad průměrem PQ. Na ní je sestrojena tětiva BC pevné délky d, jejíž krajní body jsou různé od bodů P, Q. Paprsek vyslaný z bodu B se od průměru PQ odrazí do bodu C v takovém bodě A, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle QAC|$. Dokažte, že velikost úhlu BAC nezávisí na poloze tětivy BC na polokružnici k.*

(67-A-II-2)

Řešení. Označme l opačnou polokružnici, jež je obrazem k v osové souměrnosti podle PQ. V této osové souměrnosti uvažujme rovněž obraz bodu C a označme ho C'. Protože osová souměrnost zachovává velikosti úhlů, tak rovněž $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle QAC'|$ a body B, A, C' leží na přímce. Úhel $BC'C$ je tak obvodovým úhlem k tětivě BC, a protože ta má pevnou délku, tak má tento úhel vždy stejnou velikost nezávisle na tom, jak je tětiva BC umístěna.



Nicméně z rovnoramenného trojúhelníku $C'AC$ dostaneme

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BC'C| + |\sphericalangle C'CA| = 2|\sphericalangle BC'C|,$$

neboť BAC je vnějším úhlem tohoto trojúhelníka. Velikost úhlu BAC je tak rovněž nezávislá na poloze tětivy BC. □

Literatura

[T] M. Töpfer: *Sinová věta*. Matematický korespondenční seminář. Dostupné z: `https://prase.cz//library/SinovaVetaMT/SinovaVetaMT.pdf`.

[MO] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

DIOFANTICKÉ ROVNICE

Matěj Doležálek

Klasickým druhem matematických úloh jsou ty, jež se zabývají rovnicemi, jejichž řešení nehledáme v oboru reálných čísel, ale pouze mezi čísly celými či dokonce jen přirozenými. Podle řeckého matematika Diofanta z Alexandrie bývají tyto rovnice nazývány *diofantické*. Úlohou tohoto druhu je i úloha 71-C-I-6 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Určete všechny možné hodnoty součtu $a+b+c+d$, kde a, b, c, d jsou přirozená čísla splňující rovnost

$$\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)+\left(b^2-d^2\right)\left(c^2-a^2\right)=2021.$$

Pro diofantické rovnice a jejich soustavy je typické, že obsahují více proměnných než rovnic, s touto přidanou volností je pak nutno se vypořádat pomocí prostředků specifických pro celá (resp. přirozená) čísla. Obecně mohou být diofantické rovnice velice obtížné a k jejich řešení neexistuje žádný všespásný postup garantující úspěch. V tomto příspěvku si však ukážeme dvě základní metody, které mnohdy k úspěchu vedou – první jsou úpravy na součinový tvar a využití prvočíselného rozkladu, druhou pak poznatky o mezerách mezi mocninami.

1 Rozklady na součin

Každé přirozené číslo lze rozložit na součin dvou přirozených čísel pouze konečně mnoha způsoby. Tyto rozklady jsou dány prvočíselným rozkladem – odpovídají způsobům, jak jednotlivá prvočísla z rozkladu rozdělit mezi dva činitele. Kupříkladu číslo $12=2^2\cdot 3$ se rozkládá na součin jako

$$12=1\cdot 12=2\cdot 6=3\cdot 4.$$

V úvahu samozřejmě připadají ještě rozklady vzniklé prohozením činitelů, případně přidáním záporného znaménka k oběma činitelům (pracujeme-li v celých číslech).

Pakliže tedy rovnici upravíme do tvaru $A\cdot B=C$, kde A, B jsou nějaké výrazy a C je nějaké konkrétní číslo, stačí pouze vyřešit konečně mnoho případů odpovídajících rozkladům C na $A\cdot B$. Z jedné složitější diofantické rovnice tak získáváme několik soustav dvou rovnic, které jsou navíc typicky o něco jednodušší.

Úloha 1.1. *Najděte všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž je číslo $a^2 + b$ o 62 větší než číslo $b^2 + a$.*

(62-C-II-3)

Řešení. Řešíme rovnici

$$a^2 + b = b^2 + a + 62$$

v přirozených číslech. Převedením $b^2 + a$ na druhou stranu rovnice obdržíme

$$a^2 - b^2 + b - a = 62.$$

Výrazy na levé straně lze nyní postupně upravit do součinového tvaru pomocí

$$\left(a^2 - b^2\right) + (b - a) = (a - b)(a + b) - (a - b) = (a - b)(a + b - 1).$$

Celkově tedy máme rovnici

$$(a - b)(a + b - 1) = 62. \tag{1.1}$$

Výrazy v závorkách musí být celá čísla, navíc díky $a, b \geq 1$ máme také $a + b - 1 \geq 1$. Aby tedy součin závorek byl kladný, musí i $a - b$ býti kladné. Díky prvočíselnému rozkladu $62 = 2 \cdot 31$ existují právě čtyři způsoby, jak 62 rozložit na součin dvou přirozených čísel:

$$62 = 1 \cdot 62 = 2 \cdot 31 = 31 \cdot 2 = 62 \cdot 1.$$

Zjevně navíc musí být

$$a + b - 1 \geq a + 1 - 1 = a > a - b,$$

takže v rovnici (1.1) přichází v úvahu pouze ty rozklady, kde $a + b - 1$ bude větší než $a - b$.

První možností tak je $a - b = 1$, $a + b - 1 = 62$. Sečtením těchto rovností obdržíme

$$2a - 1 = (a - b) + (a + b - 1) = 1 + 62 = 63,$$

z čehož plyne $a = 32$, a následně dopočteme $b = a - 1 = 31$. Zkouškou snadno ověříme, že $(32, 31)$ je skutečně řešením původní úlohy.

Druhou možností pak je $a - b = 2$, $a + b - 1 = 31$. Stejně jako v předchozím případě tyto rovnosti sečteme, což dá $2a - 1 = 33$. Z toho následně $a = 17$, $b = 15$ a zkouškou ověříme i toto řešení. Dohromady tak má úloha dvě řešení, $(a, b) = (32, 31)$ a $(a, b) = (17, 15)$. □

Úloha 1.2. *Je dáno prvočíslo p. Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel x, y, která splňují*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}.$$

Řešení. Zadanou rovnici vynásobíme výrazem xyp, čímž obdržíme

$$p(y+x)=xy.$$

Součinový tvar nyní získáme úpravou na

$$\begin{aligned} xy-p(x+y)&=0,\\ xy-px-py+p^2&=p^2,\\ (x-p)(y-p)&=p^2. \end{aligned}$$

Povšimněme si, že v této úpravě poněkud „uměle“ přidáváme na obě strany p^2, jen abychom získali součinový tvar na levé straně a konstantu na pravé straně.

Nyní využijeme toho, že p je prvočíslo. Díky tomu jsou jedinými přirozenými děliteli p^2 čísla 1, p a p^2. Pozor musíme dát na to, že $x-p$ a $y-p$ by mohla být záporná celá čísla, načež bychom museli vyšetřovat i rozklady jako $(-1)\cdot(-p^2)$. Nicméně v této úloze můžeme z původní rovnice díky kladnosti x, y odhadnout

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{x},$$

tedy $x>p$. Obdobně $y>p$, takže oba činitele $x-p$ a $y-p$ jsou kladné. V úvahu tedy přicházejí pouze rozklady

$$p^2=1\cdot p^2=p\cdot p=p^2\cdot 1.$$

První rozklad nám dává $x-p=1$, $y-p=p^2$, což upravíme na $x=p+1$, $y=p(p+1)$. Zkouškou ověříme

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p+1}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p+1}\cdot\frac{p+1}{p}=\frac{1}{p},$$

takže se vskutku jedná o řešení úlohy.

Pro druhý rozklad dostáváme $x-p=y-p=p$, takže $x=y=2p$. Zkouška je v tomto případě snazší, máme

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}=\frac{1}{p}.$$

Třetí rozklad se liší od prvního pouze záměnou proměnných x a y. Dohromady tak máme tři řešení úlohy:

$$(x,y)=(p+1,p^2+p),\qquad (x,y)=(2p,2p),\qquad (x,y)=(p^2+p,p+1).$$

□

2 Po sobě jdoucí mocniny

Pouze některá přirozená čísla lze zapsat jako mocniny jiného přirozeného čísla. Zaměříme-li se třeba na druhé mocniny (často též označované jako *čtverce*), máme

$$1^2 = 1, \qquad 2^2 = 4, \qquad 3^2 = 9, \qquad 4^2 = 16, \qquad 5^2 = 25, \qquad \dots$$

Všimněme si, že velikosti mezer mezi čtverci rostou a že v těchto mezerách se žádné další čtverce nemohou nacházet. Konkrétně mezi po sobě jdoucími čtverci máme rozdíl

$$(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Obdobně mezery v posloupnosti n-tých mocnin rostou pro každé $n \geq 2$.

Těchto poznatků lze využít při řešení diofantických rovnic. Pokud budeme v rovnici (či jejím podpřípadu) schopni odvodit, že řešení by dávalo dokonalou n-tou mocninu b^n vklíněnou mezi dvě po sobě jdoucí n-té mocniny, tedy $a^n < b^n < (a+1)^n$, bude to spor. Příslušná rovnice (či její podpřípad) pak nebudou mít žádné řešení. Jinou formulací téže myšlenky je to, že odhad $b^n > a^n$ můžeme při práci s přirozenými čísly automaticky vylepšit na $b^n \geq (a+1)^n$. Další vylepšení mohou přidat např. poznatky o dělitelnosti nějakým číslem.

Úloha 2.1. *Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.*

(59-A-III-1)

Řešení. Zkusme několik malých hodnot a:

- Pro $a = 1$ by mělo být $b^2 = 4 + 4 + 4 = 12$, což vzhledem k $3^2 < 12 < 4^2$ není čtverec.
- Pro $a = 2$ dostáváme $b^2 = 16 + 16 + 4 = 36$, což dává řešení $b = 6$.
- Pro $a = 3$ obdržíme $b^2 = 64 + 36 + 4 = 104$, což vzhledem k $10^2 < 104 < 11^2$ není čtverec.
- Pro $a = 4$ máme $b^2 = 256 + 64 + 4 = 324$, což dává řešení $b = 18$.

Dále ukážeme, že pro $a > 4$ již žádná další řešení neexistují. Pro spor nechť má zadaná rovnice řešení (a, b), kde $a \geq 5$. Můžeme odhadnout

$$b^2 = 4^a + 4a^2 + 4 > 4^a = (2^a)^2 .$$

Víme tedy, že b^2 je čtverec ostře větší než $(2^a)^2$. Zároveň se má jednat o sudé číslo, takže už můžeme odhadnout $b^2 \geq (2^a + 2)^2$. Tato nerovnost se ze zadané rovnice upraví na

$$\begin{aligned} 4^a + 4a^2 + 4 &\geq (2^a + 2)^2 = 4^a + 2 \cdot 2^a \cdot 2 + 4, \\ 4a^2 &\geq 4 \cdot 2^a, \\ a^2 &\geq 2^a. \end{aligned}$$

V souhrnu, je-li (a, b) řešením zadané rovnice, pak $a^2 \geq 2^a$. My však dokážeme, že pro $a \geq 5$ už platí opačná nerovnost $2^a > a^2$, čímž již vyloučíme existenci dalších řešení úlohy.

Postupujme matematickou indukcí. Pro $a = 5$ skutečně platí $2^a = 32 > 25 = a^2$. Dále dokážeme indukční krok: pokud pro $a \geq 5$ platí $2^a > a^2$, pak i $2^{a+1} > (a+1)^2$. Platí

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} \leq 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5},$$

z čehož $\frac{(a+1)^2}{a^2} \leq \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} < 2$. Následně již tedy

$$(a+1)^2 = a^2 \cdot \frac{(a+1)^2}{a^2} < 2^a \cdot 2 = 2^{a+1},$$

jak jsme chtěli dokázat. Tím je důkaz indukcí hotov, takže úloha nemá řešení s $a \geq 5$. Jedinými řešeními jsou tak $(a, b) = (2, 6)$ a $(a, b) = (4, 18)$. □

3 K procvičení

Úloha 3.1. *Nalezněte všechny dvojice celých čísel x, y splňující rovnost $xy = x + y$.*

Úloha 3.2. *Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí*

$$a + \frac{66}{a} = b + \frac{66}{b}.$$

(66-B-II-1)

Úloha 3.3. *Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b splňující rovnost $(a+3)^3 - a^3 = b^2$.*

Úloha 3.4. *Nalezněte všechny dvojice kladných celých čísel (m, n) splňující $n^4 - 7n^2 + 1 = m^2$.*

Úloha 3.5. *Najděte všechna celá čísla m a n, pro která platí rovnost $n^{n-1} = 4m^2 + 2m + 3$.*

(68-A-II-2)

Úloha 3.6 (těžší)**.** *Nalezněte všechny trojice (p, x, y), kde p je prvočíslo a x, y jsou nezáporná celá čísla splňující $p^x = y^4 + 4$.*

Návod. Výraz na pravé straně lze rozložit na součin.

Literatura

[1] R. Švarc: *Úvod do diofantických rovnic.* Sborník Matematického korespondenčního semináře, Lipová-Lázně, 2016. Dostupné z: `https://prase.cz/library/DiofantickeRovniceRS/DiofantickeRovniceRS.pdf`

[2] T. Andreescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu: *An Introduction to Diophantine Equations.* Birkhäuser, 2010.

[3] *Matematická olympiáda.* `http://www.matematickaolympiada.cz`

Autoři: Filip Čermák, Matěj Doležálek, Šárka Gergelitsová, Antonín Jančařík, Jan Krejčí, Jakub Michal, Luboš Pick, Marian Poljak, Martin Raška, Alena Jechumtál Skálová, Antonín Slavík, Radovan Švarc, Miroslav Zelený

Recenzenti: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Mgr. Marie Holíková, Ph.D.

Editoři: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Vydalo nakladatelství MatfyzPress jako svou 646. publikaci (tištěná kniha), resp. 647. publikaci (e-kniha).

Vytištěno ze sazby dodané autory.

Publikace neprošla jazykovou korekturou.

Vytisklo Reprostředisko UK MFF

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

Vydání první

Praha 2021

ISBN 978-80-7378-452-2
ISBN 978-80-7378-453-9 (e-kniha)