Geometrické zajímavosti

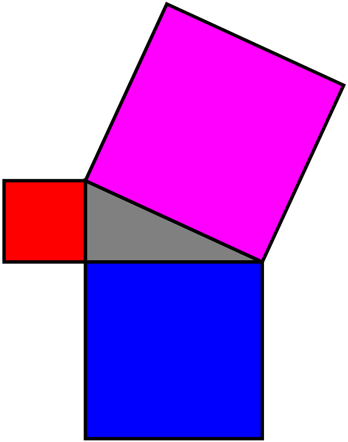
Zbyněk Šír

Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

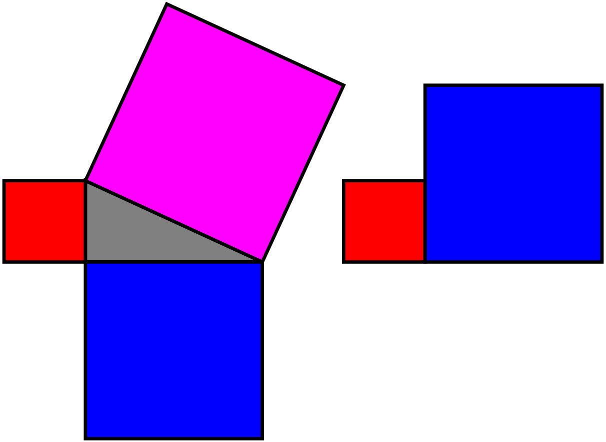
Motto

Matematika na pomezí střední a vysoké školy
má schopnost učinit (talentovaného) člověka šťastným.

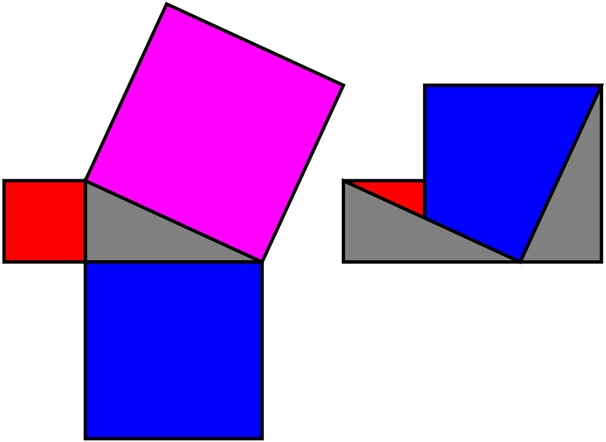
Řezací důkaz Pythagorovy věty



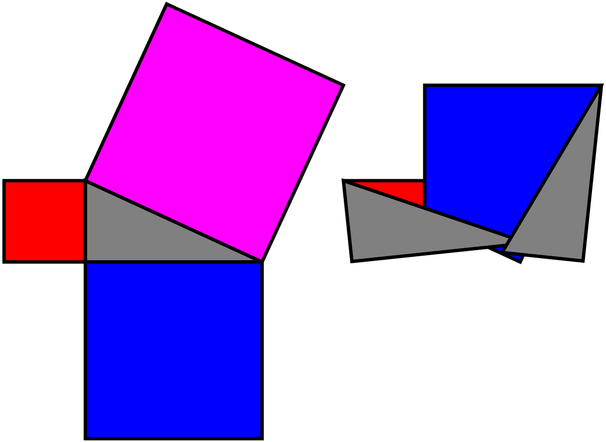
Řezací důkaz Pythagorovy věty



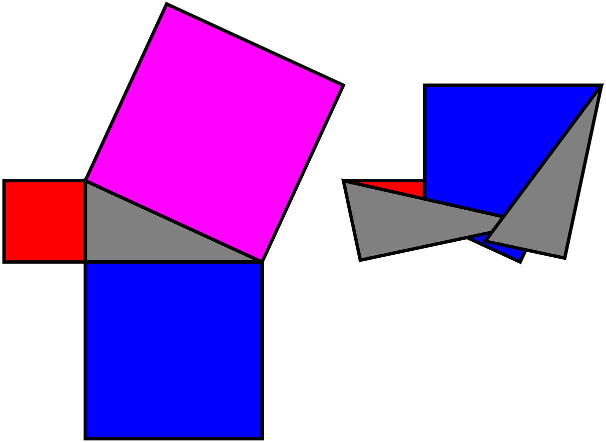
Řezací důkaz Pythagorovy věty



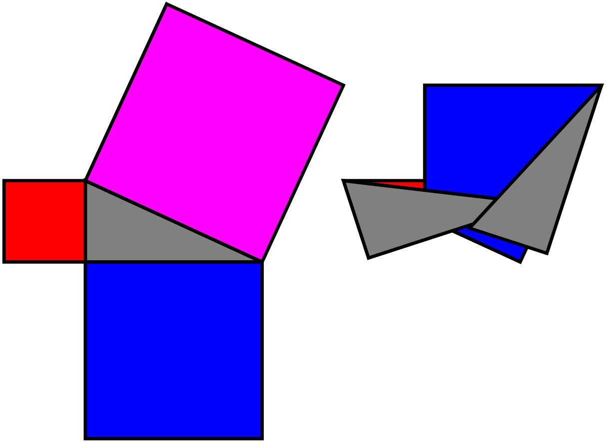
Řezací důkaz Pythagorovy věty



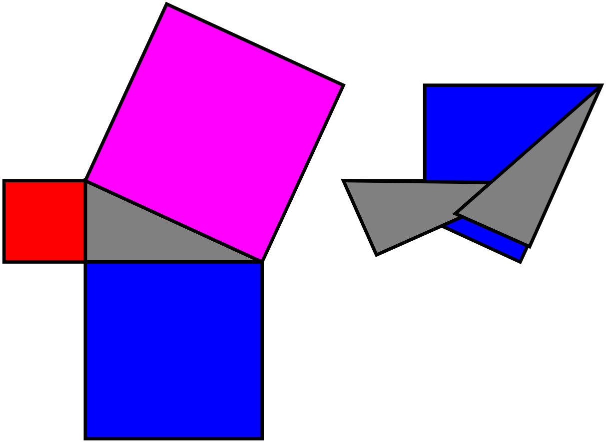
Řezací důkaz Pythagorovy věty



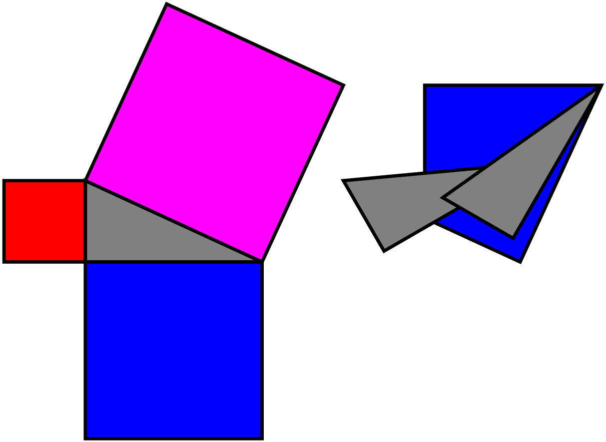
Řezací důkaz Pythagorovy věty



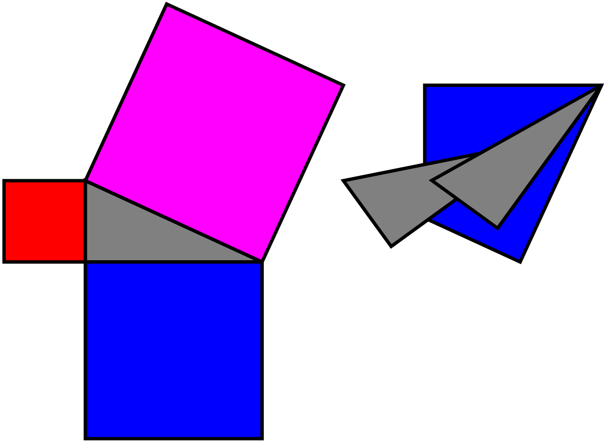
Řezací důkaz Pythagorovy věty



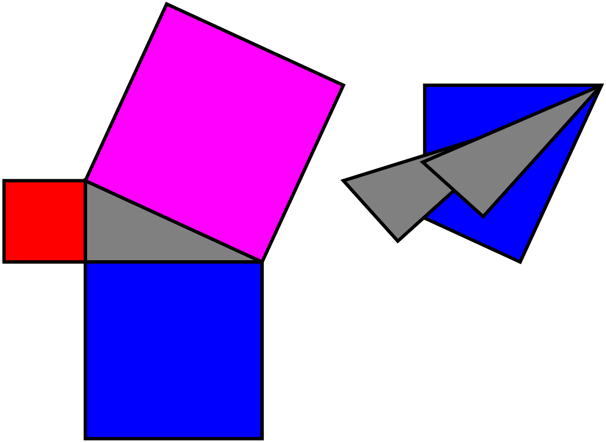
Řezací důkaz Pythagorovy věty



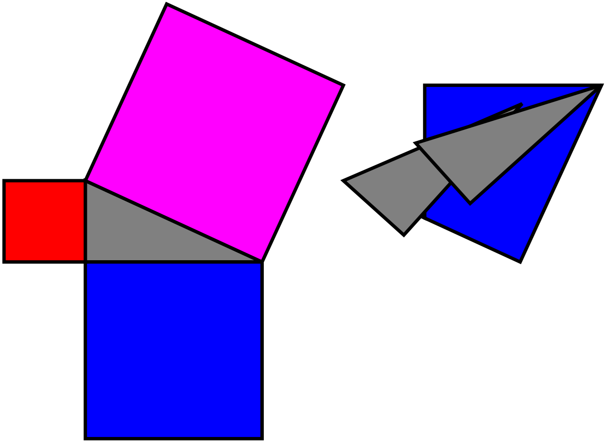
Řezací důkaz Pythagorovy věty



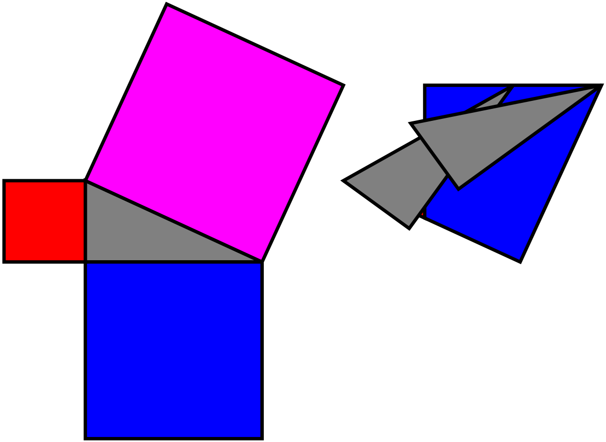
Řezací důkaz Pythagorovy věty



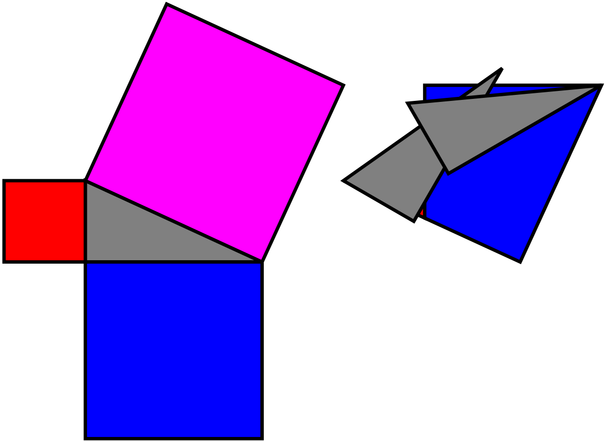
Řezací důkaz Pythagorovy věty



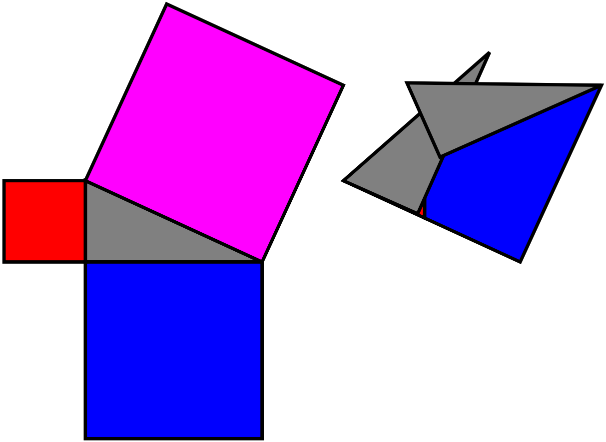
Řezací důkaz Pythagorovy věty



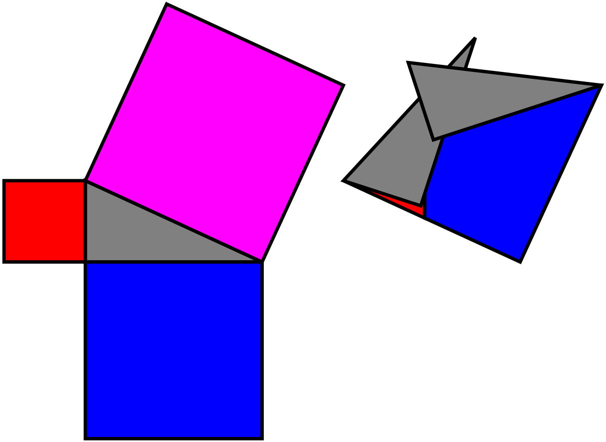
Řezací důkaz Pythagorovy věty



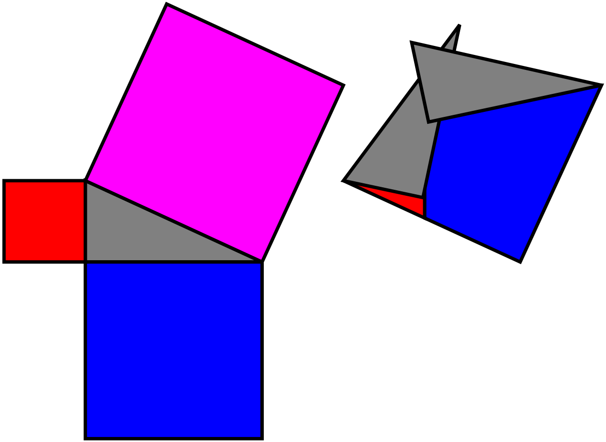
Řezací důkaz Pythagorovy věty



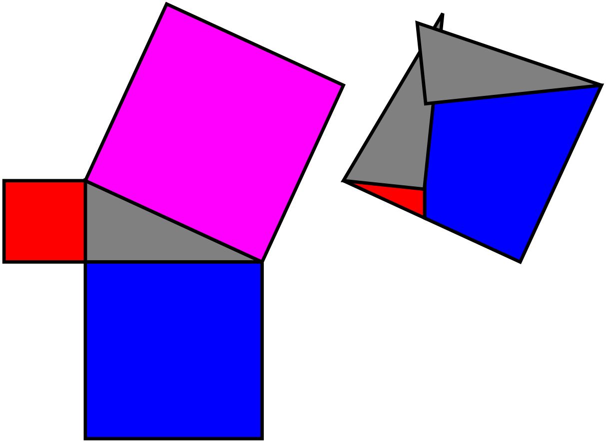
Řezací důkaz Pythagorovy věty



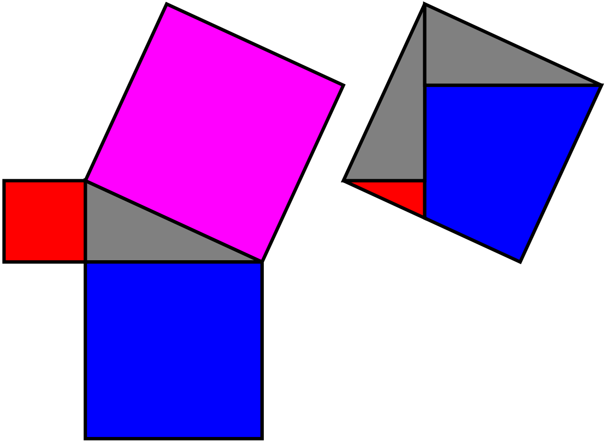
Řezací důkaz Pythagorovy věty



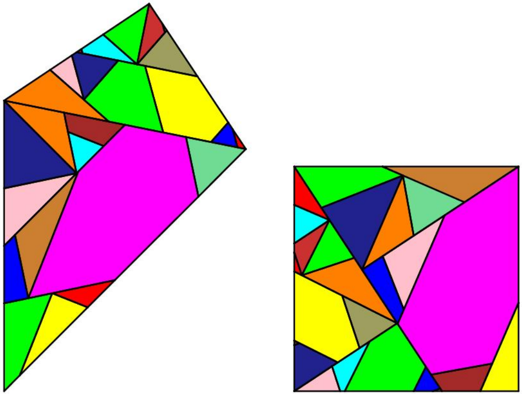
Řezací důkaz Pythagorovy věty



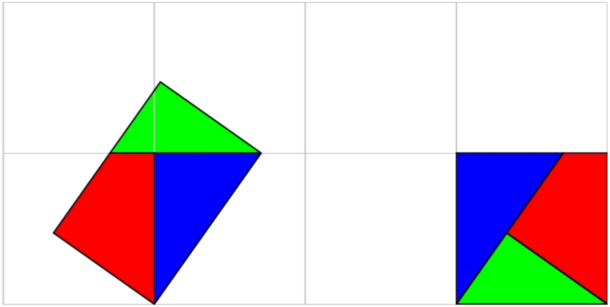
Řezací důkaz Pythagorovy věty



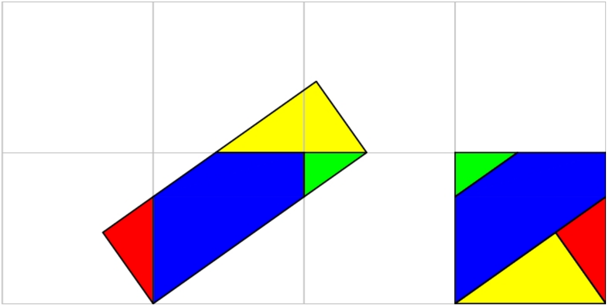
Wallace-Bolyai-Gerwienova věta



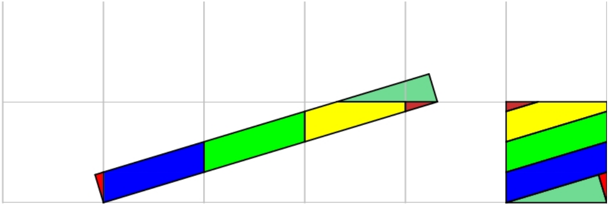
Obdélník na čtverec



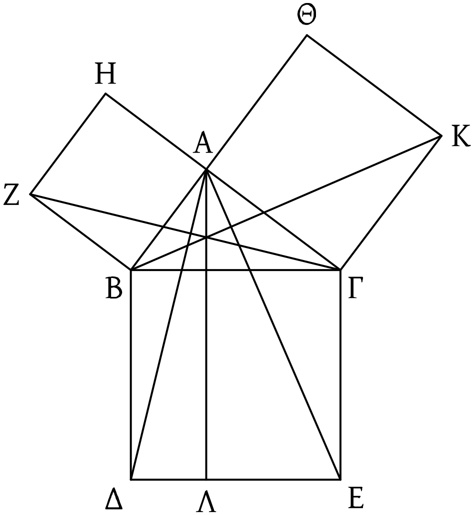
Obdélník na čtverec



Obdélník na čtverec



Eukleidův důkaz - deduktivní hiearchie

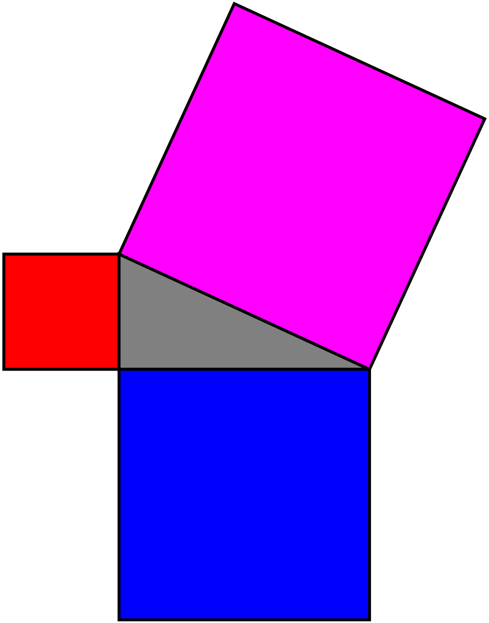


Upravený citát

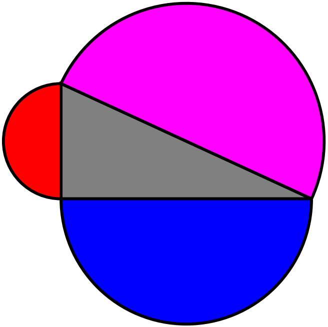
Důkazů Pythagorovy věty je dvakrát víc než matematiků, protože každý čtvrtý jich vymyslí osm.

podle D. Preisse

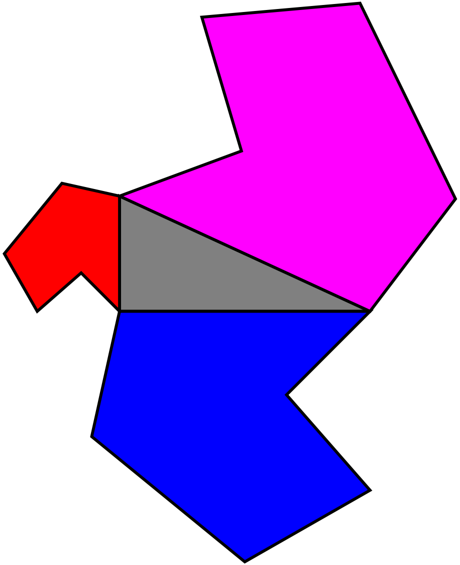
Pythagorova věta a podobnost



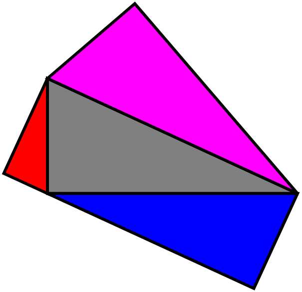
Pythagorova věta a podobnost



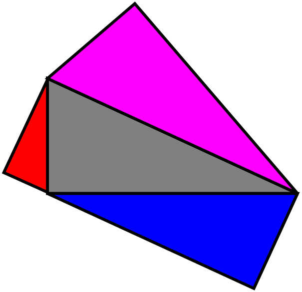
Pythagorova věta a podobnost



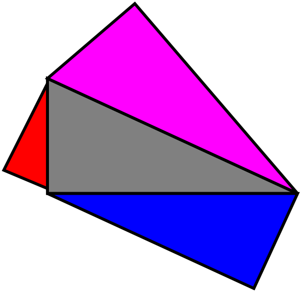
Pythagorova věta a podobnost



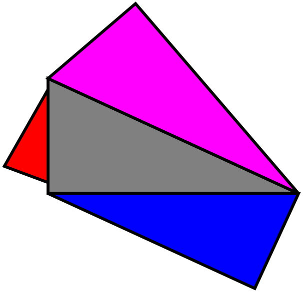
Pythagorova věta a podobnost



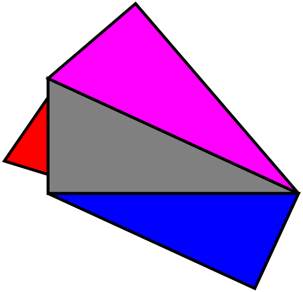
Pythagorova věta a podobnost



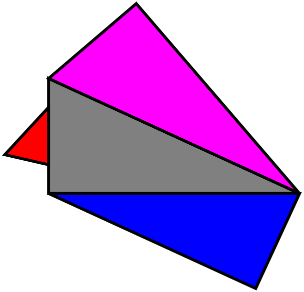
Pythagorova věta a podobnost



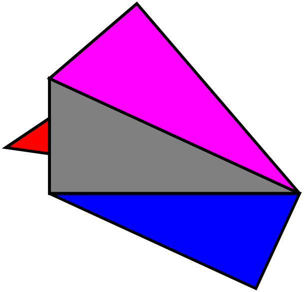
Pythagorova věta a podobnost



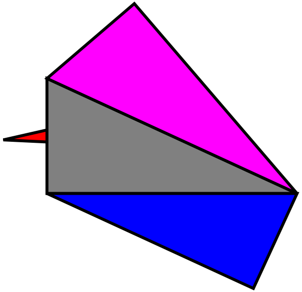
Pythagorova věta a podobnost



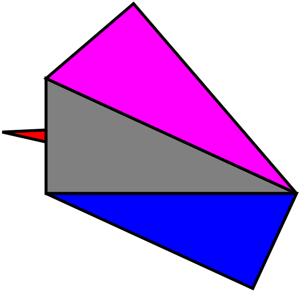
Pythagorova věta a podobnost



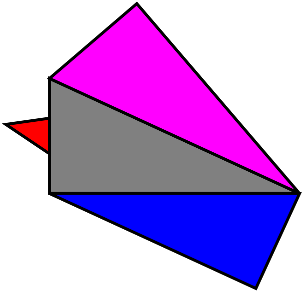
Pythagorova věta a podobnost



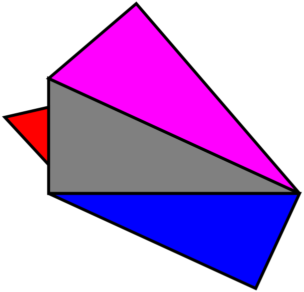
Pythagorova věta a podobnost



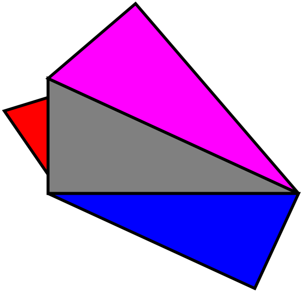
Pythagorova věta a podobnost



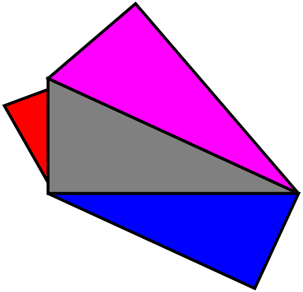
Pythagorova věta a podobnost



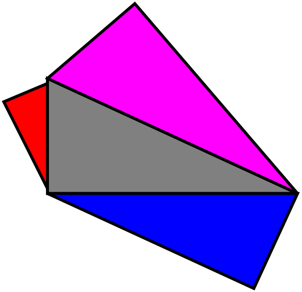
Pythagorova věta a podobnost



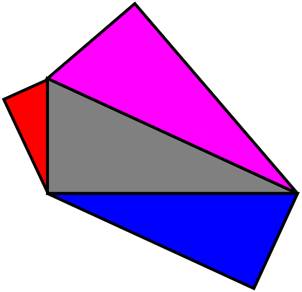
Pythagorova věta a podobnost



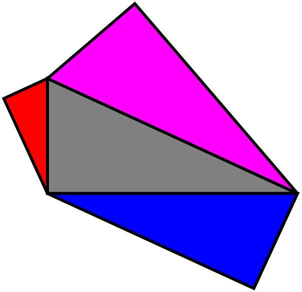
Pythagorova věta a podobnost



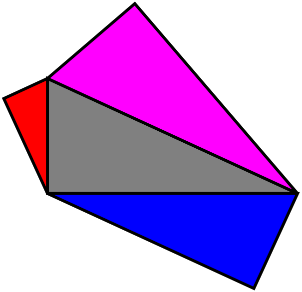
Pythagorova věta a podobnost



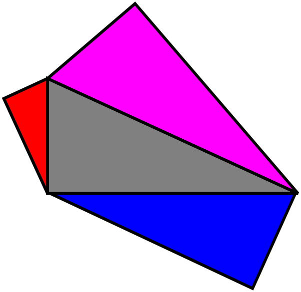
Pythagorova věta a podobnost



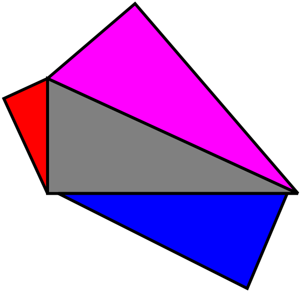
Pythagorova věta a podobnost



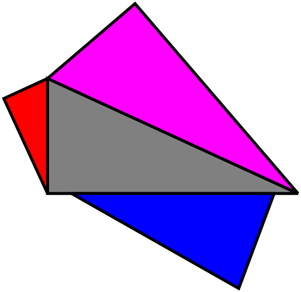
Pythagorova věta a podobnost



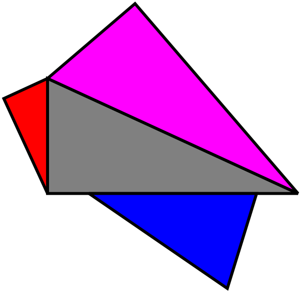
Pythagorova věta a podobnost



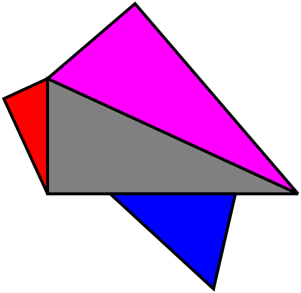
Pythagorova věta a podobnost



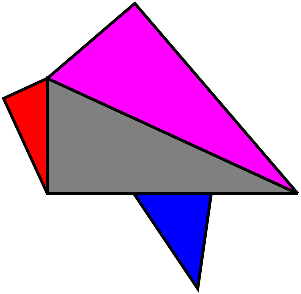
Pythagorova věta a podobnost



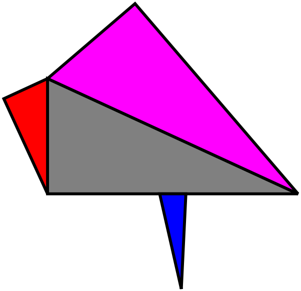
Pythagorova věta a podobnost



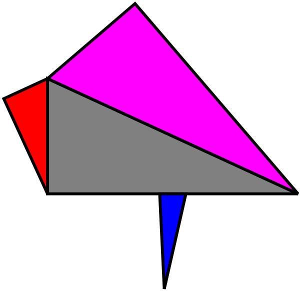
Pythagorova věta a podobnost



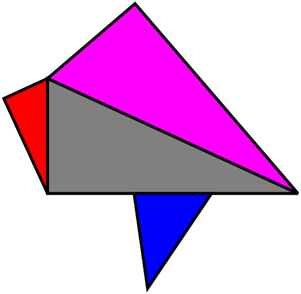
Pythagorova věta a podobnost



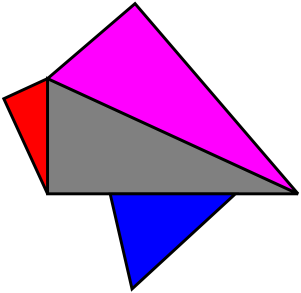
Pythagorova věta a podobnost



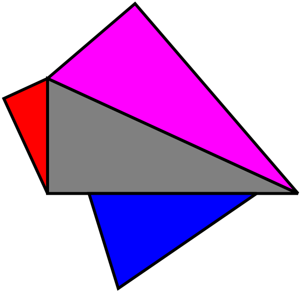
Pythagorova věta a podobnost



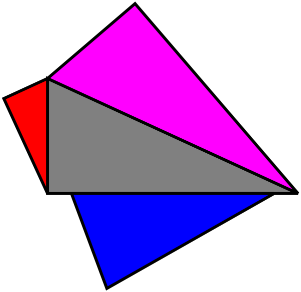
Pythagorova věta a podobnost



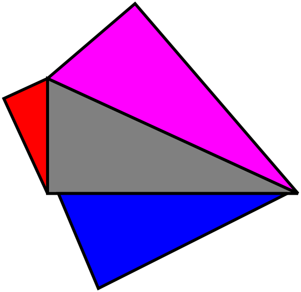
Pythagorova věta a podobnost



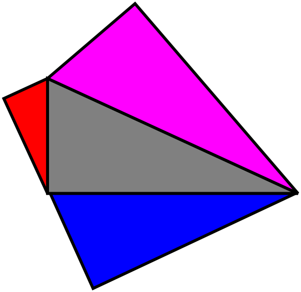
Pythagorova věta a podobnost



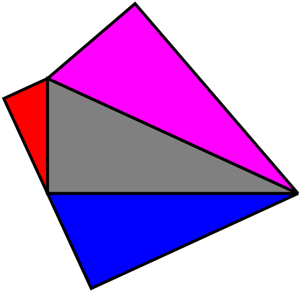
Pythagorova věta a podobnost



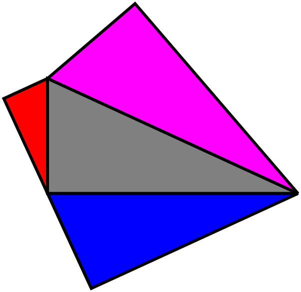
Pythagorova věta a podobnost



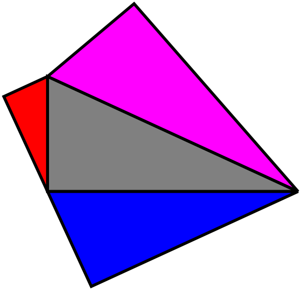
Pythagorova věta a podobnost



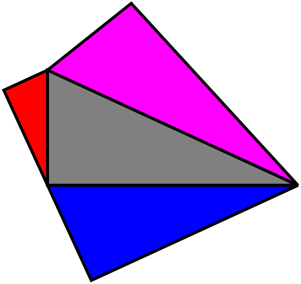
Pythagorova věta a podobnost



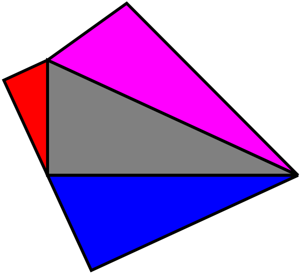
Pythagorova věta a podobnost



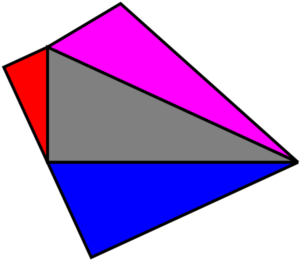
Pythagorova věta a podobnost



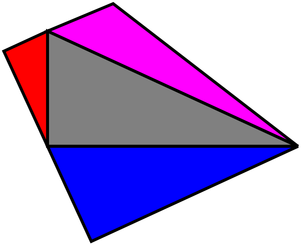
Pythagorova věta a podobnost



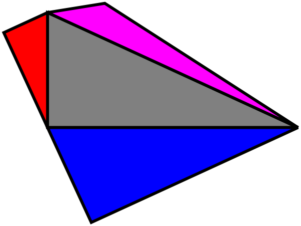
Pythagorova věta a podobnost



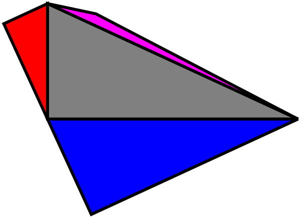
Pythagorova věta a podobnost



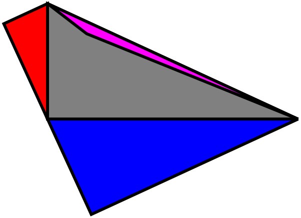
Pythagorova věta a podobnost



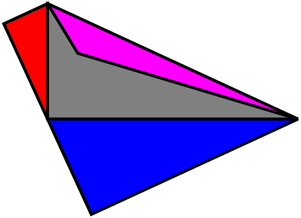
Pythagorova věta a podobnost



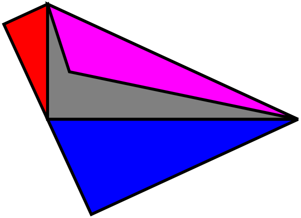
Pythagorova věta a podobnost



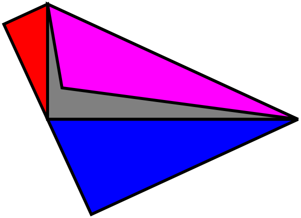
Pythagorova věta a podobnost



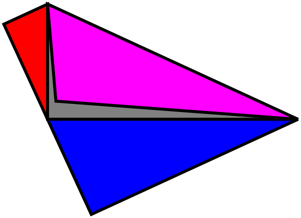
Pythagorova věta a podobnost



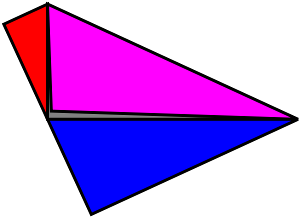
Pythagorova věta a podobnost



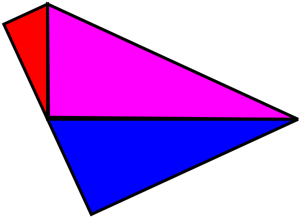
Pythagorova věta a podobnost



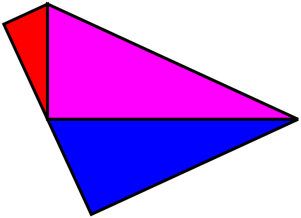
Pythagorova věta a podobnost



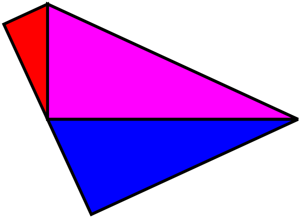
Pythagorova věta a podobnost



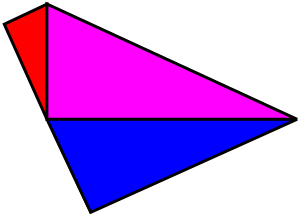
Pythagorova věta a podobnost



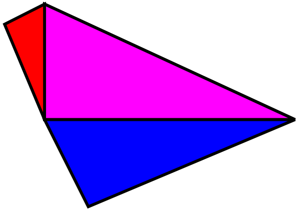
Pythagorova věta a podobnost



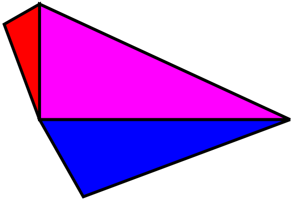
Pythagorova věta a podobnost



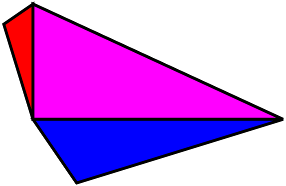
Pythagorova věta a podobnost



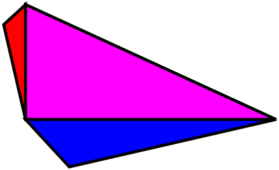
Pythagorova věta a podobnost



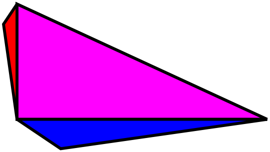
Pythagorova věta a podobnost



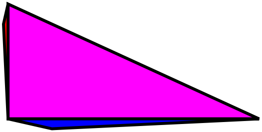
Pythagorova věta a podobnost



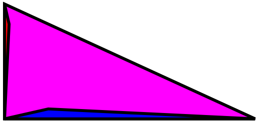
Pythagorova věta a podobnost



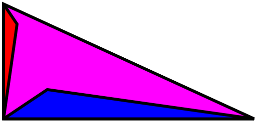
Pythagorova věta a podobnost



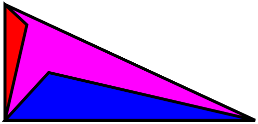
Pythagorova věta a podobnost



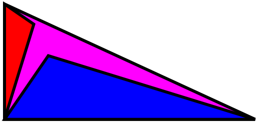
Pythagorova věta a podobnost



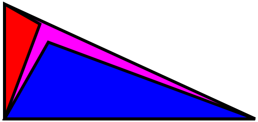
Pythagorova věta a podobnost



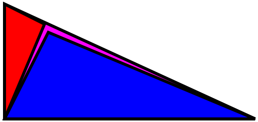
Pythagorova věta a podobnost



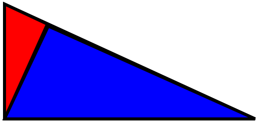
Pythagorova věta a podobnost



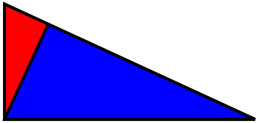
Pythagorova věta a podobnost



Pythagorova věta a podobnost



Pythagorova věta a podobnost



Proč je Pythagorova věta tak krásná

- Ekvivalence

$$\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{obsah}\,\square + \text{obsah}\,\square = \text{obsah}\,\square)$$

je fajn, ale ne úchvatná.

Proč je Pythagorova věta tak krásná

- Ekvivalence

$$\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{obsah} \,\square + \text{obsah} \,\square = \text{obsah} \,\square)$$

  je fajn, ale ne úchvatná.
- Navíc ale existence celočíselných pythagorejských trojúhelníků, (například $3, 4, 5$).

Proč je Pythagorova věta tak krásná

- Ekvivalence

$$\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{obsah} \,\square + \text{obsah} \,\square = \text{obsah} \,\square)$$

  je fajn, ale ne úchvatná.
- Navíc ale existence celočíselných pythagorejských trojúhelníků, (například $3, 4, 5$).
- Díky tomu Pythagorova věta známá v mnoha kulturách, Babylónská tabulka cca 1800 př. Kr.

Proč je Pythagorova věta tak krásná

- Ekvivalence

$$\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{obsah}\,\square + \text{obsah}\,\square = \text{obsah}\,\square)$$

  je fajn, ale ne úchvatná.
- Navíc ale existence celočíselných pythagorejských trojúhelníků, (například $3, 4, 5$).
- Díky tomu Pythagorova věta známá v mnoha kulturách, Babylónská tabulka cca 1800 př. Kr.
- Navíc význam pravého úhlu pro (řecké) geometrické poznání.

Definice a postuláty o úhlech

- *Rovinný úhel* je vzájemný sklon dvou čar, které se navzájem stýkají v rovině a které neleží v přímce.

Definice a postuláty o úhlech

- *Rovinný úhel* je vzájemný sklon dvou čar, které se navzájem stýkají v rovině a které neleží v přímce.
- Když jsou čáry svírající úhel přímé, nazývá se tento *úhel přímočarý*.

Definice a postuláty o úhlech

- *Rovinný úhel* je vzájemný sklon dvou čar, které se navzájem stýkají v rovině a které neleží v přímce.
- Když jsou čáry svírající úhel přímé, nazývá se tento *úhel přímočarý*.
- Když přímá čára, která je postavena na přímou čáru, vytváří navzájem stejně velké sousední úhly, je každý z těchto stejně velkých úhlů *pravý* a postavená přímá čára se nazývá *kolmá* na tu, na kterou byla postavena.

Definice a postuláty o úhlech

- *Rovinný úhel* je vzájemný sklon dvou čar, které se navzájem stýkají v rovině a které neleží v přímce.
- Když jsou čáry svírající úhel přímé, nazývá se tento *úhel přímočarý*.
- Když přímá čára, která je postavena na přímou čáru, vytváří navzájem stejně velké sousední úhly, je každý z těchto stejně velkých úhlů *pravý* a postavená přímá čára se nazývá *kolmá* na tu, na kterou byla postavena.
- *Tupý* úhel je ten, který je větší než pravý.

Definice a postuláty o úhlech

- *Rovinný úhel* je vzájemný sklon dvou čar, které se navzájem stýkají v rovině a které neleží v přímce.
- Když jsou čáry svírající úhel přímé, nazývá se tento *úhel přímočarý*.
- Když přímá čára, která je postavena na přímou čáru, vytváří navzájem stejně velké sousední úhly, je každý z těchto stejně velkých úhlů *pravý* a postavená přímá čára se nazývá *kolmá* na tu, na kterou byla postavena.
- *Tupý* úhel je ten, který je větší než pravý.
- *Ostrý* úhel je ten, který je menší než pravý.

Definice a postuláty o úhlech

- *Rovinný úhel* je vzájemný sklon dvou čar, které se navzájem stýkají v rovině a které neleží v přímce.
- Když jsou čáry svírající úhel přímé, nazývá se tento *úhel přímočarý*.
- Když přímá čára, která je postavena na přímou čáru, vytváří navzájem stejně velké sousední úhly, je každý z těchto stejně velkých úhlů *pravý* a postavená přímá čára se nazývá *kolmá* na tu, na kterou byla postavena.
- *Tupý* úhel je ten, který je větší než pravý.
- *Ostrý* úhel je ten, který je menší než pravý.
- Nechť se požaduje, aby si všechny pravé úhly byly navzájem rovny.

Proč je Pythagorova věta tak krásná

- Pro celočíselné trojúhelníky

$$\text{pravý úhel} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Proč je Pythagorova věta tak krásná

- Pro celočíselné trojúhelníky

$$\text{pravý úhel} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

- Hluboce propojuje základní pojmy dvou zcela odlišných světů.

Proč je Pythagorova věta tak krásná

- Pro celočíselné trojúhelníky

$$\text{pravý úhel} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

- Hluboce propojuje základní pojmy dvou zcela odlišných světů.
- Podobný případ v řecké vědě

$$\text{kvinta} \quad \Leftrightarrow \quad 3 : 2.$$

Proč je Pythagorova věta tak krásná

- Pro celočíselné trojúhelníky

$$\text{pravý úhel} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

- Hluboce propojuje základní pojmy dvou zcela odlišných světů.
- Podobný případ v řecké vědě

$$\text{kvinta} \quad \Leftrightarrow \quad 3:2.$$

- Moderní výsledky spojující topologii s geometrií, analýzou, algebrou. Například pro plochu S, která vypadá jako sféra platí Gauss-Bonnetova věta

$$\int_S K \mathrm{d}S = 2\pi\chi = 4\pi.$$

Pythagorejské trojice

- Všechny nesoudělné pythagorejské trojice lze získat z libovolných přirozených čísel $q > p$ jako

$$\begin{aligned} a &= q^2 - p^2 \\ b &= 2qp \\ c &= q^2 + p^2. \end{aligned}$$

Pythagorejské trojice

- Všechny nesoudělné pythagorejské trojice lze získat z libovolných přirozených čísel $q > p$ jako

$$\begin{aligned} a &= q^2 - p^2 \\ b &= 2qp \\ c &= q^2 + p^2. \end{aligned}$$

- Překvapivě souvisí s komplexní mocninou

$$(q + pi)^2 = (q^2 - p^2) + (2qp)i,$$

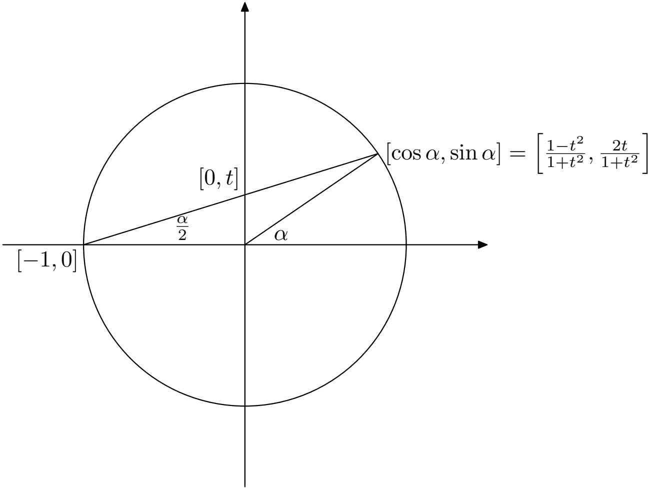
tedy všechny pythagorejské trojúhelníky dostaneme jako druhé mocniny Gaussových celých čísel.

Komplexní kvadratické rovnice

$$
\begin{aligned}
x^2 - 3x + 2 &= 0 & (1)\\
x^2 - 4x + 5 &= 0 & (2)\\
x^2 + (2+\sqrt{3}i)x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i &= 0 & (3)\\
x^2 + (4+\sqrt{5}i)x + 1 + (2\sqrt{5}-6)i &= 0 & (4)
\end{aligned}
$$

Parametrizace kružnice

Kružnici $x^2 + y^2 = 1$ obvykle parametrizujeme $[\cos\alpha, \sin\alpha]$



Souvislost $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$.

Racionální body na kružnici

- $\mathbf{c}(t) = \left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right]$, jestliže $t = \frac{p}{q}$ je racionální.
- Dostáváme
$$\mathbf{c}(\frac{p}{q}) = \left[\frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}, \frac{2pq}{q^2 + p^2}\right],$$
tedy vlastně pythagorejské trojice.
- Dobrá zpráva, úhlů s hezkým sinem a cosinem je hodně, bohužel tyto úhly nejsou hezké.
- Máme inverzní formuli
$$t = \frac{y}{x + 1},$$
můžeme tedy najít p, q.

Lomené lineární funkce

- Pro $\lambda \in (0, \infty)$ jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{\lambda x}{(\lambda - 1)x + 1}$$

  krásné na intervalu $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Lomené lineární funkce

- Pro $\lambda \in (0, \infty)$ jsou funkce tvaru

  $$f(x) = \frac{\lambda x}{(\lambda - 1)x + 1}$$

  krásné na intervalu $x \in \langle 0, 1 \rangle$.
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Lomené lineární funkce

- Pro $\lambda \in (0, \infty)$ jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{\lambda x}{(\lambda - 1)x + 1}$$

  krásné na intervalu $x \in \langle 0, 1 \rangle$.
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
- Jsou rostoucí a hladké.

Lomené lineární funkce

- Pro $\lambda \in (0, \infty)$ jsou funkce tvaru
$$f(x) = \frac{\lambda x}{(\lambda - 1)x + 1}$$
krásné na intervalu $x \in \langle 0, 1 \rangle$.
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
- Jsou rostoucí a hladké.
- Krásně se skládají.

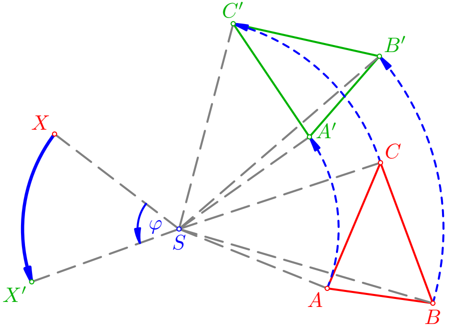
Lomené lineární funkce

- Pro $\lambda \in (0, \infty)$ jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{\lambda x}{(\lambda - 1)x + 1}$$

  krásné na intervalu $x \in \langle 0, 1 \rangle$.
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
- Jsou rostoucí a hladké.
- Krásně se skládají.
- Nepokazí nám parametrizaci kružnice.

Rotace v rovině



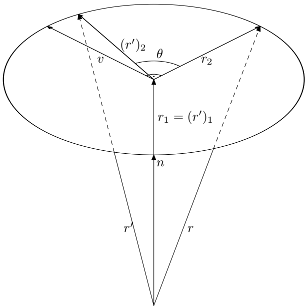
Jestliže střed otáčení je počátek $[0, 0]$, pak máme

$$
\begin{aligned}
x' &= (\cos\phi)x - (\sin\phi)y \\
y' &= (\sin\phi)x + (\cos\phi)y.
\end{aligned}
$$

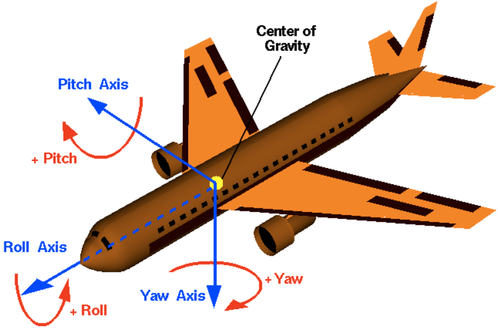
Rotace v prostoru - Rodriguesova formule

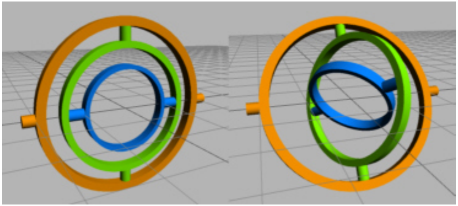
Jak spočítáme rotaci vektoru $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ kolem jednotkového vektoru $\mathbf{n}$ o úhel θ proti směru hodinových ručiček.

- $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$
  - $\mathbf{r}_1$ projekce do $\mathbf{n}$, $\mathbf{r_1} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$
  - $\mathbf{r_2}$ kolmý k $\mathbf{n}$, $\mathbf{r_2} = \mathbf{r} - \mathbf{r_1}$
- $\mathbf{v}$ kolmý k $\mathbf{n}, \mathbf{r_2}$, $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r_2} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$
- $(\mathbf{r}')_\mathbf{2} = \mathbf{r_2} \cos\theta + \mathbf{v} \sin\theta$
- $(\mathbf{r}')_\mathbf{1} = \mathbf{r_1}$
- $\mathbf{r}' = (1 - \cos\theta)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{r}\cos\theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{r})\sin\theta$



Rotace v prostoru





Závěrečné motto

Studenti (zvláště talentovaní) nám neodpustí,
když nás matematika nebude bavit.