Rozvíjení matematických talentů na středních školách

I

KOLEKTIV AUTORŮ

Praha 2019

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace byla vydána v rámci Operačního programu – Výzkum, vývoj a vzdělávání (OP VVV) a jeho projektu *Zvyšování kvality matematického vzdělávání na středních školách: motivace ke studiu a příprava k matematickým soutěžím a olympiádám.*

Všechna práva vyhrazena. Tato publikace ani žádná její část nesmí být reprodukována nebo šířena v žádné formě elektronické nebo mechanické, včetně fotokopií bez písemného souhlasu vydavatele.

Autoři: Tomáš Bárta, Filip Bialas, Šárka Gergelitsová, Zdeněk Halas, David Hruška, Antonín Jančařík, Jan Krejčí, Jakub Löwit, Luboš Pick, Marian Poljak, Mirko Rokyta, Alena Skálová, Antonín Slavík, Radovan Švarc

Recenzenti: doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.

Editoři: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

© Tomáš Bárta, Filip Bialas, Šárka Gergelitsová, Zdeněk Halas, David Hruška, Antonín Jančařík, Jan Krejčí, Jakub Löwit, Luboš Pick, Marian Poljak, Mirko Rokyta, Alena Skálová, Antonín Slavík, Radovan Švarc, 2019

© MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, 2019

ISBN 978-80-7378-375-4

Obsah

Úvod

Tato kniha je souborem příspěvků vzniklých jako doprovodný materiál k přednáškám, které budou v tomto roce pořádány na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, a to v rámci projektu Zvyšování kvality matematického vzdělávání na středních školách: motivace ke studiu a příprava k matematickým soutěžím a olympiádám. Sledují přitom zadání úloh domácího kola 69. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol, přičemž každé úloze je věnován jeden příspěvek.

Tým autorů sestává na jedné straně ze zkušených pedagogů Matematicko-fyzikální fakulty, a na straně druhé z jejích studentů, kteří v nedávné době slavili v Matematické olympiádě znamenité úspěchy. Spojuje je značná zkušenost s úlohami typickými pro MO, o kterých všichni autoři často přednášejí ať už pro soutěžící nebo pro pedagogy středních škol. Každý z autorů ke svému příspěvku přistoupil poněkud odlišným způsobem a v malé míře došlo i k určitému překryvu témat.

Společným rysem všech příspěvků je jejich hlavní účel. Jejich četba má nejrůznějším způsobem usnadnit řešení úloh MO. Sborník je určen na prvním místě středoškolským profesorům, jimž mohou přinést inspiraci pro péči o talentované žáky v seminářích či individuálních konzultacích. Věříme však, že je vhodný i přímo pro nadané studenty. Aniž by jim vyzradil řešení úloh, může je k úspěšné účasti v tomto ročníku MO povzbudit. Z dlouhodobého hlediska věříme, že představená látka a úlohy jsou vhodným obecným studijním materiálem pro adepty MO i pro všechny talentované žáky.

Všichni autoři by rádi poděkovali oběma recenzentům za pečlivé přečtení všech kapitol a za řadu cenných připomínek, které vedly ke zlepšení textu.

Praha, září 2019 Zbyněk Šír, Zdeněk Halas

Kategorie

A

TRIKY S POLYNOMY

David Hruška

1 Úvod

Polynom (česky též *mnohočlen*) stupně $n \in \mathbb{N}_0$ je výraz (funkce) tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

přičemž číslům $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ říkáme *koeficienty* a předpokládáme $a_n \neq 0$. Stupeň konstantního polynomu je nula s výjimkou konstantně nulového polynomu, jehož stupeň nedefinujeme. Hledání kořenů polynomu, resp. řešení rovnice $P(x) = 0$, patří historicky mezi klasické matematické problémy. Možná překvapivě je ale také možné znalostí o polynomech využít k řešení úloh, které v zadání žádný polynom neobsahují. Je tomu tak i v případě úlohy 69-A-I-1 matematické olympiády, která zní:

Pro kladná reálná čísla a, b, c, d, splňující $a > b$, $c > d$, platí

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokažte, že pak nutně platí $a > c > d > b$.

K řešení tohoto typu úloh se hodí tvrzení o vztahu kořenů a koeficientů polynomu, které v tomto textu zformulujeme a následně ukážeme několik jeho aplikací na úlohy olympiádního typu. Nebude-li řečeno jinak, uvažujeme jako doposud všechny kořeny i koeficienty polynomů reálné.

2 Teorie

Uveďme nejprve jedno základní tvrzení o kořenech polynomů.

Tvrzení 2.1 (O kořenech). *Je-li $P(x)$ polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ jeho kořen, pak existuje polynom $Q(x)$ stupně $n - 1$, pro který platí $P(x) = (x - x_0)Q(x)$.*

Toto tvrzení lze dokázat například z toho, že $P(x_0) = 0$ implikuje $P(x) = P(x) - P(x_0)$ a použití (1.1) na posledně zapsaný rozdíl ukazuje, že z každého členu u stejného koeficientu a_k lze vytknout $x - x_0$. My si zde všimneme především toho, že z tvrzení vyplývá, že polynom stupně n může mít nejvýše n reálných kořenů. Skutečně, jelikož každý kořen x_i podle tvrzení o kořenech vytkne z $P(x)$ závorku tvaru $(x-x_i)$, dávalo by alespoň $n+1$ kořenů polynom stupně alespoň $n+1$. Toto tvrzení zřejmě platí i když počítáme kořeny *včetně násobnosti*, tedy kořen x_0 počítáme tolikrát, kolikrát lze z $P(x)$ vytknout závorka $(x - x_0)$. Například polynom

$$x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 29x^2 + 24x - 20 = (x - 2)^2(x - 5)(x^2 + 1)$$

má stupeň pět a tři reálné kořeny počítáno včetně násobnosti.

Viètovy[1] *vztahy* (v české literatuře někdy též *vztahy mezi kořeny a koeficienty*) ukazují, jak kořeny polynomu souvisí s jeho koeficienty. Uvažme kvadratický trojčlen $x^2 + bx + c$ a předpokládejme, že má dva (ne nutně různé) reálné kořeny x_1 a x_2. Díky tvrzení o kořenech je možné náš trojčlen zapsat v součinovém tvaru jako

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2).$$

Roznásobením posledního součinu a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin[2] proměnné x dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} b &= -x_1 - x_2 \\ c &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

Pro polynom třetího stupně $x^3 + px^2 + qx + r$ s kořeny x_1, x_2, x_3 dostaneme stejným postupem trojici rovností

$$\begin{aligned} p &= -x_1 - x_2 - x_3 \\ q &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ r &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

V tomto textu si zpravidla vystačíme s kvadratickými a kubickými polynomy, pro úplnost však uvedeme i obecnou verzi pro polynom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ stupně $n \in \mathbb{N}$, který má n reálných kořenů $x_1, \ldots, x_n$. Po roznásobení součinového tvaru vyjde u mocniny x^k součet součinů přes všechny $(n-k)$-tice kořenů se správným znaménkem, což můžeme formálně vyjádřit vzorcem

$$a_k = (-1)^{n-k} \sum_{j_1 < \cdots < j_{n-k}} x_{j_1} \cdots x_{j_{n-k}} \qquad j_i \in \{1, \ldots, n\},$$

[1] François Viète, 1540–1603, francouzský matematik.

[2] To, že z rovnosti polynomů jakožto funkcí plyne rovnost všech jejich koeficientů, si zvídavý čtenář pomocí uvedeného tvrzení o kořenech snadno rozmyslí.

kde $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ a $i \in \{1, \ldots, n-k\}$.

Poznámka 2.2. Mohli bychom uvažovat obecný nenulový koeficient u vedoucího členu x^n, ale tento případ lze snadno převést na náš případ vedoucího koeficientu rovného jedné (takovým polynomům říkáme *monické*), který dává o něco jednodušší formulky.

Poznámka 2.3. Známe-li koeficienty polynomu, můžeme Viètovy vztahy chápat jako soustavu (nelineárních) rovnic pro jeho kořeny. Bohužel tento přístup nalezení kořenů obecně neusnadňuje.

3 Úlohy

Vztahy mezi kořeny a koeficienty mají celou řadu užitečných důsledků. Jak bylo naznačeno v úvodu, my se budeme věnovat převážně aplikacím na algebraické úlohy středoškolské matematiky, jejichž zadání o polynomech přímo hovořit vůbec nemusí, ale které přesto mají elegantní řešení založené na použití našeho tvrzení. Společným návodem pro všechny následující úlohy je nalézt polynom(y), uvádějící do souvislosti informace poskytnuté zadáním a tvrzení, které je třeba dokázat. Odměnou za tento poněkud trikový krok je obvykle stručnější a elegantnější řešení než to získané přímočařejším postupem.

3.1 Snadné úlohy

Úloha 3.1. *Nechť pro reálná čísla a, b, c platí*

$$\begin{aligned} a+b+c &> 0 \\ ab+bc+ca &> 0 \\ abc &> 0. \end{aligned}$$

Dokažte, že pak jsou a, b, c kladná čísla.

Řešení. Výrazy objevující se na levých stranách soustavy nerovností známe z Viètových vztahů pro monický polynom třetího stupně. Vskutku, položíme-li $P(x) := (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$, plyne ze zadaných nerovností, že $P(x) < 0$ pro každé $x < 0$, takže všechny kořeny polynomu P (což jsou přesně zkoumaná čísla a, b, c) jsou kladné. $\square$

Úloha 3.2. *Nechť pro reálná čísla a, b, c platí*

$$\begin{aligned} a+b+c &< 0 \\ ab+bc+ca &> 0 \\ abc &< 0. \end{aligned}$$

Dokažte, že pak jsou a, b, c záporná čísla.

Řešení. Analogickým postupem jako v předchozí úloze dostaneme, že $P(x) > 0$ pro $x > 0$, a proto kořeny a, b, c, polynomu P musí být záporné. □

Úloha 3.3. *Splňují-li reálná čísla a, b, c, d soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} a+b &= c+d \\ ab &= cd, \end{aligned}$$

pak $\{a,b\} = \{c,d\}$.

Řešení. V zadání se objevují výrazy z Viètových vztahů pro kvadratický polynom. Uvažme tedy polynomy $P(x) = (x-a)(x-b)$ a $Q(x) = (x-c)(x-d)$. Ze zadání a Viètových vztahů pak dostáváme, že se polynomy P a Q shodují ve všech třech odpovídajících koeficientech, a tedy jsou totožné. Z toho plyne, že i dvojice a, b kořenů P musí být stejná jako dvojice c, d kořenů Q, což jsme měli dokázat. □

Úloha 3.4. *Reálná čísla $a \neq b$ splňují $a^2 - a = b^2 - b = 1$. Spočtěte $a + b + ab$.*

Řešení. Zadání můžeme přeformulovat tak, že a a b jsou různé kořeny polynomu $P(x) = x^2 - x - 1$. Z Viètových vztahů pak máme $a + b = 1$ a $ab = -1$, takže $a + b + ab = 0$. □

Úloha 3.5. *Tři z kořenů polynomu $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ jsou 2, -3 a 5. Spočtěte $a + b + c$.*

Řešení. Zadání přímočaře vede na Viètovy vztahy pro polynom čtvrtého stupně. Ty jsme si sice explicitně neuváděli, ale uvidíme, že v tomto případě situace není nijak zvlášť komplikovaná. Zamysleme se nejprve nad tím, kolik může mít daný polynom P kořenů. Ze zadání má jistě alespoň tři a pomocí tvrzení o kořenech si uvědomíme, že po vytknutí odpovídajících tří závorek nám zbude polynom prvního stupně, který má jistě právě jeden kořen. Tedy $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c = (x-2)(x+3) \cdot (x-5)(x-x_0)$, kde x_0 je onen čtvrtý kořen. Všimněme si, že koeficient u x^3 je nulový, neboli $2 - 3 + 5 + x_0 = 0$, čili $x_0 = -4$. Pak už snadno spočítáme $a+b+c = P(1)-1 = (1-2)(1+3)(1-5)(1+4)-1 = 79$. □

Úloha 3.6. *Reálná čísla x, y, z splňují*

$$x + y = 6$$
$$z^2 = xy - 9.$$

Dokažte, že $x = y$.

Řešení. V zadané soustavě opět identifikujeme výrazy z kvadratických Viètových vztahů. Nenecháme se znejistit tím, že máme písmeno x již zabrané a uvážíme polynom $P(t) = (t - x)(t - y)$ v proměnné t. Z Viètových vztahů plyne $P(t) = t^2 - 6t + z^2 + 9 = (t - 3)^2 + z^2$. Jelikož druhá mocnina reálného (resp. nenulového reálného) čísla je nezáporná (resp. kladná), máme $P(t) \geq 0$ pro všechna reálná t s rovností pouze pro $t = 3$ a $z = 0$. Na druhou stranu ale víme, že $P(x) = P(y) = 0$, čili dohromady dostáváme $x = y = 3$ a jsme hotovi. □

3.2 Obtížnější úlohy

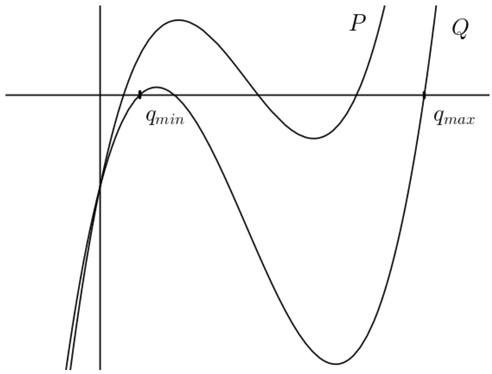
Úloha 3.7. *Kladná čísla a, b, c, x, y, z splňují rovnosti*

$$a + b + c = x + y + z,$$
$$abc = xyz,$$

a navíc $\max\{a, b, c\} \leq \max\{x, y, z\}$*. Dokažte, že*

$$\min\{a, b, c\} \leq \min\{x, y, z\}.$$

Řešení. Uvažme dva kubické polynomy $P(t) = (t - a)(t - b)(t - c)$ a $Q(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$. Z Viètových vztahů a zadaných rovností pak dostáváme, že $P(t)$ a $Q(t)$ se v roznásobeném tvaru mohou lišit pouze v lineárním členu. Existuje tedy reálné číslo r takové, že $P(t) = Q(t)+rt$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Grafy P a Q jsou tedy buď totožné (v případě $r = 0$), nebo se protínají v jediném bodě, a to pro $t = 0$. V prvním z uvedených případů tvrzení úlohy triviálně platí. Ve druhém případě je na kladných reálných číslech jeden z polynomů vždy větší než druhý. Poslední část zadání nám říká, že největší z kořenů P je menší, než největší z kořenů Q. Jelikož oba uvažované polynomy nabývají od svého největšího kořene dál pouze kladných hodnot, dostáváme pro $q_{max} = \max\{x, y, z\}$ (tedy největší kořen Q) nerovnost $P(q_{max}) > 0 = Q(q_{max})$. Díky úvaze výše máme tedy $P(t) > Q(t)$ pro všechna $t > 0$, z čehož speciálně pro $t = q_{min} = \min\{x, y, z\}$ plyne, že i nejmenší kořen P je menší, než nejmenší kořen Q, což lze zapsat jako $\min\{a, b, c\} < \min\{x, y, z\}$ a jsme hotovi (viz obrázek).



□

Úloha 3.8. *Dokažte, že pokud pro celá nenulová a, b, c platí*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\in\mathbb{Z}\quad a\quad \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\in\mathbb{Z}\,,$$

pak už $|a|=|b|=|c|$.

Řešení. Označme si zadaná (celá) čísla $r=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, $s=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$. Uvažme polynom $P(x)=(x-\frac{a}{b})(x-\frac{b}{c})(x-\frac{c}{a})$ a povšimněme si, že jeho lineární koeficient je roven $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}=s$, takže polynom $P(x)=x^3-rx^2+sx-1$ má celočíselné koeficienty. Zároveň víme, že jeho kořenem je (např.) zlomek $\frac{a}{b}=\frac{k}{l}$, kde k a l jsou nesoudělná. Dosazením dostaneme $0=P(\frac{k}{l})=\frac{k^3}{l^3}-r\frac{k^2}{l^2}+s\frac{k}{l}-1$. Rozšířením číslem l^3 se zbavíme zlomků a máme $0=k^3-rlk^2+skl^2-l^3$. Jelikož k zřejmě dělí všechny sčítance na pravé straně kromě posledního, platí i $k\mid l^3$. To spolu s nesoudělností k a l implikuje, že $k=\pm1$. Podobně jelikož l dělí všechny sčítance kromě prvního, máme $l\mid k^3$, a tedy $l=\pm1$, z čehož plyne $a=\pm b$. Analogicky ukážeme i $b=\pm c$ a tvrzení úlohy je dokázáno. □

Literatura

Další úlohy o polynomech (resp. řešitelné s jejich pomocí) lze nalézt například v následujících textech vzniklých v rámci semináře MKS:

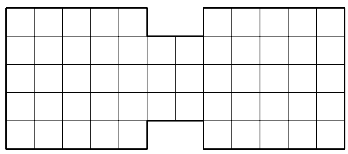
- Josef Tkadlec: *První setkání s polynomy*, `https://mks.mff.cuni.cz/library/PrvniSetkaniSPolynomyPT/PrvniSetkaniSPolynomyPT.pdf`.
- Marta Kossaczká: *Vietove vzťahy*, `https://mks.mff.cuni.cz/library/VietovevztahyMK/VietovevztahyMK.pdf`.

ÚLOHY S DLÁŽDĚNÍM

Filip Bialas

V matematické olympiádě a podobných soutěžích se často vyskytují kombinatorické úlohy, ve kterých je cílem do daného útvaru vyskládat co nejvíce menších útvarů či najít počet možností, jak tento útvar vydláždit celý. Jedna taková úloha se nachází i v domácím kole 69. ročníku matematické olympiády kategorie A:

Dokažte, že počet možností, jak lze útvar na obrázku vydláždit dominovými kostkami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kostka pokrývá vždy dvě políčka sousedící stranou.)

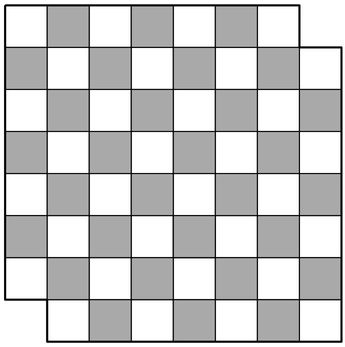


V tomto textu rozebereme několik úloh, ve kterých budeme dláždit rovinné útvary sestavené z jednotkových čtverců jak dominy, tak jinými útvary. V řešení budeme často využívat triku zvaný *obarvování*, ve kterém si představujeme políčka velkého útvaru obarvené různými barvami. Například při pokrývání čtverečkové sítě pomocí dominových kostek se bude velmi hodit šachovnicové obarvení, které zapříčiní, že každá položená kostka domina pokryje právě jedno bílé a právě jedno černé políčko.

1 Obarvování

Úloha 1.1. *Určete kolika způsoby můžeme vyskládat dominovými kostkami* 1×2 *šachovnici* 8×8 *s odebranými dvěma protějšími rohovými políčky.*

Řešení. Ukážeme, že neexistuje žádný způsob, jak tento útvar dominy vyskládat. Představme si šachovnici s políčky obarvenými obvyklým způsobem bílou a černou barvou.



Protější rohy šachovnice poté mají buď oba bílou nebo oba černou barvu. Potřebujeme proto dominovými kostkami pokrýt 30 políček jedné barvy a 32 políček druhé, což ale není možné, neboť každým dominem pokryjeme právě jedno bílé a právě jedno černé políčko. (Bílých a černých políček proto musíme pokrýt vždy stejně.) □

Můžeme si všimnout, že volba rozměrů šachovnice zrovna 8×8 byla trochu zbytečná a stejné řešení by fungovalo i pro čtvercovou šachovnici s libovolnou sudou délkou strany, nebo dokonce i pro obdélníkové šachovnice se sudými délkami obou stran. Pro obdélníky s jednou lichou a jednou sudou stranou se řešení rozbije na tom, že protější rohy budou mít různé barvy – můžete si rozmyslet, že v takových případech půjde útvary dominovými kostkami vždy alespoň jedním způsobem vyskládat. Pro obdélníky s oběma stranami lichých délek se pro neexistenci vyskládání dá použít mnohem jednodušší argument – počet čtverečků v tomto obrazci totiž není sudý.

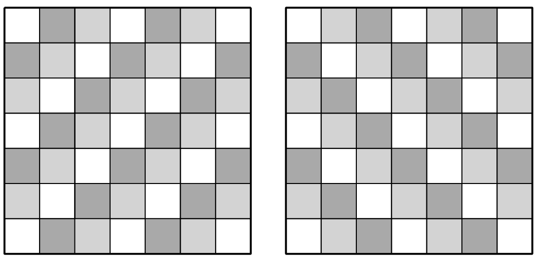
Při přemýšlení o podobných úlohách se proto často hodí podívat se i na podobné útvary menších rozměrů, u kterých často umíme vyzkoušením všech možností zjistit, zda nějaké řešení existuje anebo i nějaké vlastnosti, které je poté možné lehce využít i pro řešení původní větší úlohy. Tento postup se ale samozřejmě nedá využít vždy – rozměry v zadání můžou být nějakým způsobem speciální. V naší úloze nám moc nepomůže řešení pro šachovnici 3×3 (zatímco úvahami o šachovnicích 2×2 či 4×4 si pomoct můžeme – minimálně zvládneme zjistit, že žádné vyskládání neexistuje, a možná i to, že když se snažíme útvar vyskládat a zbudou nám jen dvě políčka, tak mají v klasickém šachovnicovém obarvení stejnou barvu).

Šachovnici jsme obarvili klasickým způsobem, abychom tím zapříčinili, že každá dominová kostička zabere jedno bílé a jedno černé políčko. To, že je takto šachovnice obarvena normálně je nám při řešení podobné úlohy úplně jedno a pokud bychom měli místo domin 2×1 jiný útvar, mohlo by se hodit i obarvení jiné.

Když bychom chtěli něco říct o vyskládání libovolného útvaru složeného ze čtverečků pomocí kostiček 3×1, bylo by přirozenější použít jedno z obarvení třemi barvami jako na obrázku. V takových obarveních zabere každá 3×1 kostička právě jedno políčko každé ze tří barev. Pokud bychom ale zůstali u klasického šachovnicového obarvení, zabrala by každá kostka 2 černé a 1 bílé nebo 1 černé a 2 bílá políčka, což by nám většinou při řešení moc nepomohlo.

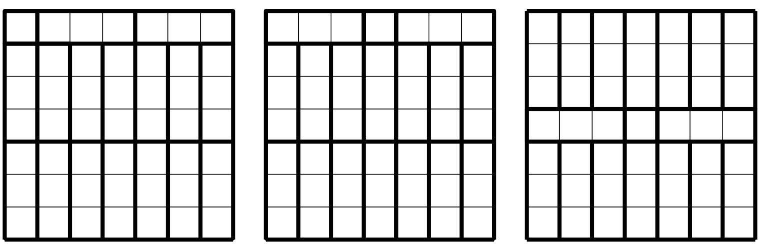
Podívejme se nyní na jednu úlohu, jejíž řešení využívá právě toto obarvení:

Úloha 1.2. *Šachovnice* 7×7 *je pokryta* 16 *dílky* 3×1 *a jedním dílkem* 1×1. *Jaké jsou možné polohy dílku* 1×1*?*



Řešení. V obarvení šachovnice na obrázku výše je 17 bílých políček, ostatních barev je vždy 16. Jelikož každý dílek 3×1 zakryje právě jedno políčko každé z barev, musí dílek 1×1 ležet na bílém políčku.

Pokud však obarvíme šachovnici zrcadlově převráceně podle svislé osy, znovu zjistíme, že dílek 1×1 musí ležet na bílém políčku. Políček, které byly bílé v obou obarveních je 9. Pro každé z nich umíme sestrojit hledané pokrytí (na obrázku jsou sestrojeny pro tři políčka, ostatní se získají vhodným otočením některých z nich). □



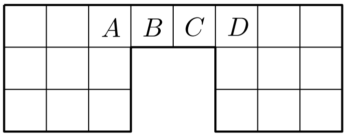
Poznamenejme, že příklady validních vyskládání šachovnice jsou nezbytnou součástí řešení. Bez nich bychom věděli jen, že pro dílek

1×1 na libovolném políčku různém od těchto devíti šachovnici vyskládat nelze, ale o ostatních bychom nevěděli vůbec nic. Šachovnicové obarvení tedy není jediné možné, nicméně díky své jednoduchosti je v úlohách asi nejpoužívanější.

2 Nepočítání

Podívejme se nyní na zjednodušenou verzi úlohy z úvodu:

Úloha 2.1. *Ukažte, že počet způsobů, jak vyskládat útvar na obrázku dominy* 1×2 *je roven druhé mocnině nějakého celého čísla.*



Řešení. Políčko B musí být v každém vyskládání pokryto dominem, které společně s ním obsahuje políčko A nebo políčko C. Pokud by ale ono domino obsahovalo políčka B a C, zůstal by nám na levé straně lichý počet políček, které už nelze dominy vyskládat. Proto v každém vyskládání dominy musí ležet jedno domino přes políčka A, B. Poté lehce vidíme, že domino, které obsahuje políčko C, musí obsahovat i políčko D.

Označme nyní k počet způsobů, jak vyskládat neoznačená políčka v levé části obrázku. Útvar vpravo je úplně stejný, takže počet způsobů, jak vyskládat jej, bude také roven k. Při vyskládávání celého obrazce můžeme tyto způsoby libovolně kombinovat, takže celkový počet vyskládání je roven $k \cdot k = k^2$ (ke každému z k vyskládání levé části můžeme zvolit libovolné z k vyskládání pravé části). □

Všimněte si, že k vyřešení úlohy nebylo vůbec potřeba spočítat přesný počet vyskládání. V tomto případě je možné celkem lehce ukázat, že $k^2 = 16$. Ale pokud by útvar v zadání byl jen o trochu větší, už by se mohlo stát, že by počet vyskládání šel spočítat pouze s použitím počítače, a ani to ne vždy. To nám ale v ničem nebrání o výsledků něco zajímavého říct, aniž bychom ho přesně spočítali.

3 Závěr

Obarvování nám umožňuje někdy elegantně ukázat, že některá pokrytí nejde sestrojit. Často je ale potřeba jej při řešení dané úlohy použít chytře nebo ho zkombinovat i s dalšími triky.

Literatura

[PSS] A. Engel: *Problem Solving Strategies.* Springer-Verlag, New York, 1998.

GEOMETRICKÉ NEROVNOSTI

Radovan Švarc

Cílem tohoto textu je ukázat některé základní techniky, které se používají při důkazech geometrických nerovností. V první kapitole budeme zkoumat použití trojúhelníkové nerovnosti, v druhé pak využití obsahů při práci s geometrickými nerovnostmi. Text je koncipovaný jako obecný úvod do technik v příkladech tohoto typu, vznikl však jako pomocný k úloze 69-A-I-3 matematické olympiády, která zní:

Uvnitř stran AB a AC daného trojúhelníka ABC jsou po řadě zvoleny body P a Q. Označme R průsečík přímek BQ a CP a p, q, r postupně vzdálenosti bodů P, Q, R od přímky BC. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

Pro jednoduchost zápisu budeme v celém textu značit jako a, b, c délky stran BC, CA, AC, kdykoliv se objeví trojúhelník ABC.

1 Trojúhelníková nerovnost

Základní technikou nejčastěji používanou v geometrických nerovnostech je známá trojúhelníková nerovnost:

Věta 1.1 (Trojúhelníková nerovnost). *V každém trojúhelníku ABC platí $a + b > c$, $b + c > a$ a $c + a > b$. Obecně pro libovolné tři body X, Y, Z v rovině platí $|XY| + |YZ| \geq |ZX|$, kde rovnost nastává je tehdy, když X, Y, Z leží na přímce v tomto pořadí.*

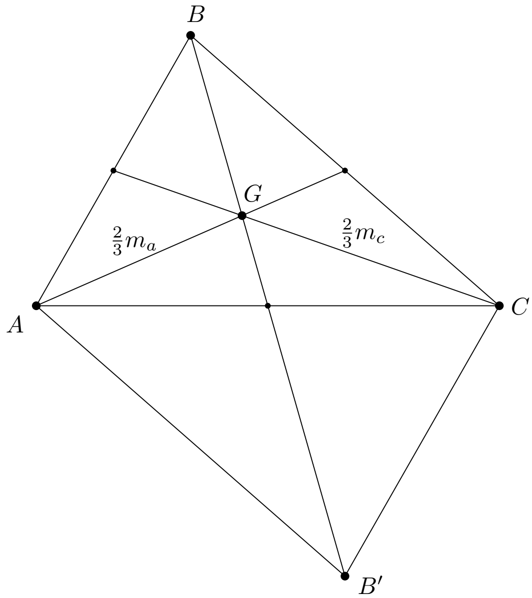
Častý způsob důkazů geometrických nerovností pak je použití trojúhelníkové nerovnosti na správně zvolený trojúhelník. To si nyní ilustrujme na příkladech.

Úloha 1.2. *Nechť m_a, m_b, m_c jsou délky těžnic v trojúhelníku ABC. Pak*

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Řešení. Nechť G je těžiště trojúhelníku ABC. Protože těžiště leží ve dvou třetinách těžnice, platí $|AG| = \frac{2}{3}m_a$, $|BG| = \frac{2}{3}m_b$, $|CG| = \frac{2}{3}m_c$.

Z trojúhelníkové nerovnosti aplikované na trojúhelník AGC dostaneme $\frac{2}{3}(m_a + m_c) = |AG| + |GC| > |AC| = b$. Analogicky dostaneme $\frac{2}{3}(m_b + m_c) > a$ a $\frac{2}{3}(m_a + m_b) > c$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme $\frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c) > a+b+c$. Po vynásobení této nerovnosti $\frac{3}{4}$ dostaneme první z dokazovaných nerovností.



Dále nechť B' je bod takový, že $ABCB'$ je rovnoběžník. Protože úhlopříčky v rovnoběžníku se půlí, je BB' dvakrát delší těžnicí, takže $|BB'| = 2m_b$. Zároveň, protože rovnoběžník má protější strany stejně dlouhé, platí $|CB'| = |BA| = c$. Takže z trojúhelníkové nerovnosti aplikované na trojúhelník BCB' plyne $a+c = |BC|+|CB'| > |BB'| = 2m_b$. Analogicky dostaneme $a + b > 2m_c$ a $b + c > 2m_a$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme $2a + 2b + 2c > 2m_a + 2m_b + 2m_c$, čili $a + b + c > m_a + m_b + m_c$, což je přesně druhá z požadovaných nerovností. □

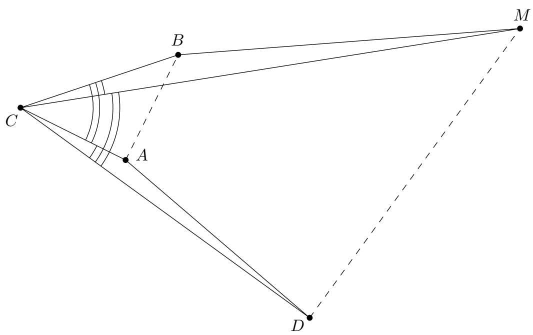
Věta 1.3 (Ptolemaiova)**.** *Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v rovině. Pak platí*

$$|AC| \cdot |BD| \le |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|.$$

Řešení. Nechť M je bod takový, že trojúhelníky CMB a CDA jsou přímo podobné. Pak $\frac{|CM|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|AC|}$ a platí $|\angle BCM| = |\angle ACD|$. Protože úhly BCM a DCM a úhly ACD a ACB se buď oba liší o úhel BCD, nebo se oba sčítají na úhel BCD, musí být i $|\angle DCM| = |\angle ACB|$. Z toho, a vztahu $\frac{|CM|}{|DC|} = \frac{|CB|}{|AC|}$ je díky větě *sus* trojúhelník DCM podobný trojúhelníku ACB. Z podobnosti trojúhelníků CMB a CDA dostaneme vztah $|BM| = \frac{|BC|\cdot|AD|}{|AC|}$ a z podobnosti trojúhelníků DCM a ACB vztah $|MD| = \frac{|CD|\cdot|AB|}{|AC|}$. Pak díky trojúhelníkové nerovnosti aplikované na (možná degenerovaný) trojúhelník BMD dostáváme

$$|BD| \leq |BM| + |MD| = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AC|} + \frac{|CD| \cdot |AB|}{|AC|}.$$

Přenásobením této nerovnosti délkou $|AC|$ dostaneme přesně požadovanou nerovnost. □



Poznámka 1.4. Rovnost v předchozí nerovnosti nastává buď tehdy, když $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, nebo když tyto body leží na jedné přímce, a to buď v pořadí A, B, C, D, nebo v pořadí A, D, C, B.

2 Obsahy v geometrických nerovnostech

Dalším důležitým prvkem objevujícím se v geometrických nerovnostech je využití obsahů. Nejčastěji se využívá vyjádření obsahu trojúhelníka jako součinu $\frac{ah_a}{2}$, kde h_a je délka výšky na stranu a, ale někdy se objevují i jiné způsoby, například pomocí vyjádření $\frac{ab\sin\gamma}{2}$, kde γ je úhel mezi stranami a a b. Občas se dokonce dá použít i tzv. Hérónův vzorec pro obsah trojúhelníka, který využívá pouze délek stran:

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}.$$

Úloha 2.1. *Nechť h_a, h_b a h_c jsou délky výšek v trojúhelníku ABC. Pak*

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_b}.$$

Řešení. Nechť S značí obsah trojúhelníku ABC. Pak platí $2S = ah_a = bh_b = ch_c$.

Z trojúhelníkové nerovnosti $a + c > b$ pak plyne $\frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_c} > \frac{2S}{h_b}$. Po vydělení $2S$ dostaneme požadovaný výsledek. □

Úloha 2.2. *Nechť P je bod uvnitř trojúhelníka ABC. Paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB nazveme postupně X, Y a Z. Ukažte, že*

$$|AP| \cdot |BP| \cdot |CP| \geq 8|PX| \cdot |PY| \cdot |PZ|.$$

Řešení. Označíme-li B' patu výšky z vrcholu B a h_b délku této výšky, platí $|BP| + |PY| \geq |BY| \geq |BB'| = h_b$, kde druhá nerovnost plyne z toho, že trojúhelník $BB'Y$ je pravoúhlý a BY je v něm přepona.

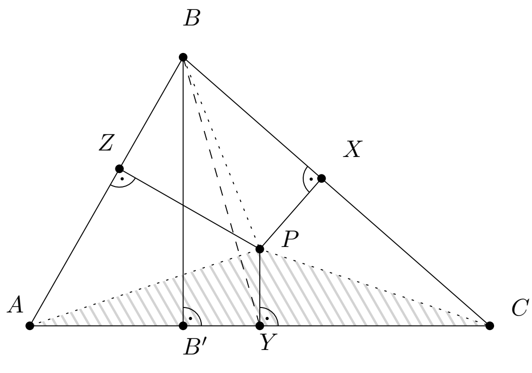
Nechť S_{ABC} značí obsah trojúhelníka ABC a podobně pro další trojúhelníky. Využijeme vztahu $S_{ABC} = S_{APB} + S_{BPC} + S_{CPA}$ a dostaneme $a \cdot |PX| + b \cdot |PY| + c \cdot |PZ| = 2(S_{APB} + S_{BPC} + S_{CPA}) = 2S_{ABC} = bh_b \leq b \cdot |BP| + b \cdot |PY|$. Z toho poškrtáním stejných členů na obou stranách a použitím AG nerovnosti[3] dostaneme

$$b \cdot |BP| \geq a \cdot |PX| + c \cdot |PZ| \geq 2\sqrt{ac \cdot |PX| \cdot |PZ|}.$$

Analogicky dostaneme nerovnosti $a \cdot |AP| \geq 2\sqrt{bc \cdot |PY| \cdot |PZ|}$ a $c \cdot |CP| \geq 2\sqrt{ab \cdot |PX| \cdot |PY|}$. Vynásobením těchto tří nerovností dostaneme

$$abc \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot |CP| \geq 8abc|PX| \cdot |PY| \cdot |PZ|.$$

Zkrácením abc dostaneme požadovaný výsledek. □



[3] O AG nerovnosti se podrobněji dozvíte v jedné z následujících kapitol.

Literatura

[IM] IMOmath : Geometric inequalities (Ivan Matić)
`https://imomath.com/index.php?options=600&lmm=0`

[MKS] Archiv Matematického Korespondenčního Semináře
`http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php`

MODULÁRNÍ ARITMETIKA

Mirko Rokyta

1 Úvod

Jednou z oblíbených kategorií matematických problémů jsou úlohy související s modulární aritmetikou. Modulární aritmetika aneb „počítání s kongruencemi“ je aritmetika, která je definována pouze na prvcích nějaké konečné množiny (tím se rozumí, že i výsledky příslušných aritmetických operací budou prvky oné konečné množiny). Typickým představitelem takovéto konečné množiny je *množina zbytkových tříd*, ztotožňující všechna čísla, která při dělení daným přirozeným číslem dávají stejný zbytek. Například při dělení celých čísel číslem 5 můžeme dostat pouze zbytky 0, 1, 2, 3, 4, což vede ke ztotožnění například čísel 3, 8, 13, 18, 23, ..., ale i -2, -7, -12, ..., neboť všechna tato čísla dávají při dělení pěti stejný zbytek, konkrétně 3. Zmíněná čísla proto vytvářejí *zbytkovou třídu*, označovanou symbolem „3“. Pokud tedy v tomto smyslu nahlížíme na množinu $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ jako na množinu zbytkových tříd, představujeme si pod symbolem „3“ nejen onu trojku, ale také všechna čísla s ní ekvivalentní – dávající při dělení 5 také zbytek 3. Přesněji je tato ekvivalence vymezena v definici 2.1.

Úloha 69-A-I-4 matematické olympiády má následující zadání:

Řekneme, že podmnožina P *množiny* $M = \{1, 2, 3 \dots, 42\}$ *je polovičatá, pokud obsahuje* 21 *prvků a každé ze* 42 *čísel v množinách* P *a* $Q = \{7 \cdot x \,|\, x \in P\}$ *dává při dělení číslem* 43 *jiný zbytek. Určete počet polovičatých podmnožin množiny* M.

Je vidět, že tato úloha pracuje s pojmem zbytku při dělení, nebude tedy na škodu se se zmíněnou modulární aritmetikou trochu seznámit.

2 Modulární aritmetika

Definice 2.1. Uvažujme $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, a označme symbolem „$a \bmod n$“ zbytek při dělení čísla a číslem n.[4] Řekneme, že a je *kongruentní* s b *modulo* n, pokud je $a \bmod n = b \bmod n$, tedy pokud je

[4] Připomeňme, že zbytek při dělení přirozeným číslem je vždy nezáporný, tedy například $(-12) \bmod 5 \neq -2$, přestože platí $(-12) = (-2) \cdot 5 - 2$. Správně je $(-12) = (-3) \cdot 5 + 3$ a tedy $(-12) \bmod 5 = 3$.

zbytek při dělení a/n a b/n tentýž. Píšeme:

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Pro další úvahy je dobré si rozmyslet následující ekvivalenci, platnou pro $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \,\big|\, (a-b)\,, \tag{2.1}$$

kde $n \,\big|\, (a-b)$ označuje jako obyčejně to, že n dělí beze zbytku výraz $(a-b)$. Skutečně, $a \equiv b \pmod{n}$ znamená, že a i b dávají stejný zbytek při dělení číslem n, tedy že existují $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $z \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, taková že $a = m_1 n + z$, $b = m_2 n + z$. Potom ale $a - b = (m_1 - m_2)n$, a tedy $n \,\big|\, (a-b)$. Pokud naopak $n \,\big|\, (a-b)$, existuje $k \in \mathbb{Z}$, že $a - b = kn$. Pokud b dává při dělení číslem n zbytek $z_1 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, je $b = mn + z_1$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$, a tedy $a = kn + b = (k+m)n + z_1$ dává při dělení číslem n tentýž zbytek. □

Pro čtenáře máme v této chvíli dvě dobré zprávy. Ta první zní, že s modulárním počítáním má každý z nás zkušenosti už od velmi raného věku: výrok $14 \equiv 2 \pmod{12}$ není nic jiného, než že 14 hodin jsou dvě hodiny (odpoledne), případně $22 + 7 \equiv 5 \pmod{12}$ znamená, že je-li 22 hodin, tak za 7 hodin bude 5 hodin (ráno). Druhá dobrá zpráva je, že sčítání, odečítání, násobení i umocnění kongruencí je poměrně snadné, o čemž mluví následující tvrzení.

Tvrzení 2.2. *Nechť pro $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, platí $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$. Potom*

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) &\equiv (b_1 + b_2) && \pmod{n} \\ (a_1 - a_2) &\equiv (b_1 - b_2) && \pmod{n} \\ (a_1 \cdot a_2) &\equiv (b_1 \cdot b_2) && \pmod{n} \\ a_1^k &\equiv b_1^k && \pmod{n} \qquad \text{pro } k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Využijeme (2.1). Protože je $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, existuje $k_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že $a_1 - b_1 = nk_1$, podobně existuje i $k_2 \in \mathbb{Z}$ takové, že $a_2 - b_2 = nk_2$. Pak ovšem platí

$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = n(k_1 + k_2),$$

tedy n dělí $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)$, což ovšem opět podle (2.1) znamená, že $(a_1 + a_2) \equiv (b_1 + b_2) \pmod{n}$.

Podobným způsobem ukážeme i další tvrzení, vždy stačí ověřit, že n dělí rozdíl výrazů, o kterých chceme dokázat, že jsou kongruentní modulo n. Důkaz kongruence rozdílu ponecháváme čtenáři, pro součin dostaneme:

$$a_1a_2 - b_1b_2 = a_1(a_2 - b_2) + b_2(a_1 - b_1) = a_1nk_2 + b_2nk_1 = n(a_1k_2 + b_2k_1),$$

čímž jsme ověřili kýženou dělitelnost $n \mid (a_1a_2 - b_1b_2)$. Vztah $a_1^k \equiv b_1^k \pmod{n}$ plyne snadno indukcí podle $k \in \mathbb{N}$ s využitím pravidla o násobení. □

Příklad 2.3.

- Protože je $14 \equiv 2 \pmod{12}$, a $23 \equiv 11 \pmod{12}$ (připomeňme si, že počítání modulo 12 je vlastně počítání času na klasickém ciferníku s 12 hodinami), můžeme $14 + 23 \pmod{12}$ spočíst také jako $2 + 11 \pmod{12}$. Tedy je $14 + 23 \equiv 2 + 11 \equiv 13 \equiv 1 \pmod{12}$. Podobně je $14 \cdot 23 \equiv 2 \cdot 11 \equiv 22 \equiv 10 \pmod{12}$.

- Znalost tohoto typu počítání nám může pomoci například při odvození některých známých pravidel pro dělitelnost. Symbolem $a = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$, $a_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a_n \neq 0$, označíme dekadický zápis čísla $a \in \mathbb{N}$, které vznikne tak, že „za sebe zapíšeme" postupně cifry $a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0$; tedy v tomto značení bychom například číslo $a = 347$ zapsali jako $a = \overline{347}$ s ciframi $a_2 = 3$, $a_1 = 4$, $a_0 = 7$. Čtenář jistě nahlédne, že jiná forma zápisu téhož je $a = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 = \sum_{k=0}^{3} a_k 10^k$. Zkoumáme-li dělitelnost $a = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ například číslem 3, zajímá nás zbytek při dělení a trojkou, tedy $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \bmod 3$. To spočteme postupně takto:

$$\begin{aligned} & 10 \equiv 1 && \pmod{3} \\ \Rightarrow\quad & 10^k \equiv 1^k && \pmod{3}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \Rightarrow\quad & a_k 10^k \equiv a_k && \pmod{3}, \quad a_k \in \{0, \dots, 9\}, \\ \Rightarrow\quad & \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k && \pmod{3}. \end{aligned}$$

  Poslední rovnost lze číst tak, že číslo a dává při dělení číslem 3 stejný zbytek jako dává při dělení 3 ciferný součet čísla a. Speciálně tedy je a dělitelné třemi, pokud je třemi dělitelný jeho ciferný součet.

Toto (známé) pravidlo si možná zaslouží, aby bylo zachyceno v samostatném tvrzení, spolu s dalšími dvěma neméně známými pravidly.

Tvrzení 2.4. *Mějme $a \in \mathbb{N}$, jehož dekadický zápis je $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$, $a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Potom platí:*

- *Číslo a je dělitelné třemi právě tehdy, když je dělitelné třemi číslo $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ (tedy ciferný součet čísla a). Dokonce platí, že obě čísla dávají při dělení třemi stejné zbytky.*
- *Číslo a je dělitelné devíti právě tehdy, když je dělitelné devíti číslo $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ (tedy ciferný součet čísla a). Dokonce platí, že obě čísla dávají při dělení devíti stejné zbytky.*
- *Číslo a je dělitelné jedenácti právě tehdy, když je dělitelné jedenácti číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$. Dokonce platí, že obě čísla dávají při dělení jedenácti stejné zbytky.*

Důkaz. Dělitelnost třemi je studována v předchozím příkladu. Pro dělitelnost devíti resp. jedenácti se použije naprosto stejný postup. V případě dělitelnosti devíti lze důkaz ponechat čtenáři jako procvičení toho, že důkaz pro trojku pochopil, pro jedenáctku použijeme stejný postup:

$$10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^k \equiv (-1)^k \pmod{11},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$\Rightarrow a_k 10^k \equiv a_k (-1)^k \pmod{11},\ a_k \in \{0, \ldots, 9\},$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k \pmod{11}.$$
□

Cvičení 2.5. Ukažte, že číslo a je dělitelné sedmi, pokud je dělitelné sedmi i číslo, vzniklé z a oddělením poslední cifry, od kterého se poté odečte dvojnásobek této poslední cifry. (Například pro číslo 203 spočteme $20 - 2 \cdot 3 = 14$. Protože 14 je dělitelné 7, je i 203 dělitelné 7.)

Návod. Pište $a = 10n + m = 7(n + m) + 3(n - 2m)$. □

3 Několik dalších příkladů

Úloha 3.1 (63-A-I-1/N2)**.** Zjistěte, kdy pro tři prvočísla p, q, r má rozdíl $A - B$, kde $A = (p+1)(q+1)(r+1)$, $B = pqr$, hodnotu, která při dělení šesti dává zbytek 3.

Důkaz. S ohledem na výjimečnost prvočísla 2 je často dobré zkusit, zda by některé z p, q, r mohlo být rovno dvěma. To by znamenalo, že součin $B = pqr$ je sudý. To ale znamená, že $A = (p+1)(q+1)(r+1)$ je liché, neboť v opačném případě by nemohlo platit $A - B \equiv 3 \pmod 6$. Pak jsou ale i všechna čísla $(p+1), (q+1), (r+1)$ lichá, a tedy všechna čísla p, q, r jsou sudá. Protože jsou to prvočísla, musí být $p = q = r = 2$. Pak ale dostáváme, že $(p+1)(q+1)(r+1) - pqr = 27 - 8 = 19 \equiv 1 \pmod 6$, což nevyhovuje zadání. Právě jsme tedy ukázali, že žádné z p, q, r nemůže být rovno 2 a mohou to tedy být jen lichá prvočísla.

Protože je $A - B \equiv 3 \pmod 6$, je $A - B$ je dělitelné třemi. Ukážeme, že i $B = pqr$ je dělitelné třemi. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tedy že pqr třemi dělitelné není. To ovšem znamená, že ani žádné z čísel p, q, r není dělitelné třemi, což dále implikuje, že ani $A = (p+1)(q+1)(r+1)$ není dělitelné třemi – to plyne z toho, že $A - B$ je třemi dělitelné. Čísla p, q, r ale nemohou při dělení třemi dávat zbytky 2, to by $(p+1), (q+1), (r+1)$ (a tedy i A) byly dělitelné třemi. Proto platí

$$\begin{aligned} p &\equiv 1 \pmod 3, & q &\equiv 1 \pmod 3, & r &\equiv 1 \pmod 3, \text{ tj.} \\ p+1 &\equiv 2 \pmod 3, & q+1 &\equiv 2 \pmod 3, & r+1 &\equiv 2 \pmod 3. \end{aligned}$$

Celkově tedy pro $A - B$ podle pravidel modulární aritmetiky platí:

$$(p+1)(q+1)(r+1) - pqr \equiv 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3,$$

což je spor, který dokazuje, že pqr je dělitelné 3.

Víme tedy už, že žádné z p, q, r není sudé a že pqr je dělitelné třemi. Alespoň jedno z čísel p, q, r musí být proto rovno číslu 3, nechť je bez újmy na obecnosti $p = 3$. Z lichosti pqr pak plyne, že pqr není dělitelné šesti, tedy $pqr \equiv 3 \pmod 6$ a podle zadání musí tedy být

$$(p+1)(q+1)(r+1) = 4(q+1)(r+1) \equiv 0 \pmod 6,$$

tedy je dělitelné šesti. Žádné z q, r není sudé, tedy žádné z $(q+1), (r+1)$ není liché a speciálně tedy nemůže být lichým násobkem tří. Tedy aspoň jedno z nich musí být dělitelné šesti: nechť je například $q + 1 = 6k$, tj. $q = 6k - 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

Odvodili jsme, že má-li trojice prvočísel p, q, r splňovat podmínky úlohy, musí být nutně $p = 3$, q prvočíslo tvaru $6k - 1$, a r libovolné liché prvočíslo. Ukážeme, že každá taková trojice už podmínky úlohy opravdu splňuje. Skutečně, je $A = (p+1)(q+1)(r+1) = 4 \cdot 6k \cdot (r+1) \equiv 0 \pmod 6$, a $B = pqr = 3 \cdot (6k-1) \cdot r \equiv 3 \pmod 6$, neboť je to lichý násobek tří. Celkem tedy $A - B = 0 - 3 \equiv 3 \pmod 6$, což jsme chtěli ukázat. Všechna řešení úlohy jsou tedy (až na možnou záměnu pořadí) trojice p, q, r, kde $p = 3$, q prvočíslo tvaru $6k - 1$, a r libovolné liché prvočíslo. □

Úloha 3.2. Mějme množinu $M_p := \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$, kde p je prvočíslo. Buď dále $n \in \mathbb{N}$ nesoudělné s p, a uvažujme množinu

$$M_{p,n} := \{n \bmod p,\ 2n \bmod p,\ 3n \bmod p, \ldots,\ (p-1)n \bmod p\}. \tag{3.1}$$

Ukažte, že množiny M_p a $M_{p,n}$ obsahují tytéž prvky, tedy že seznam prvků množin $M_{p,n}$ a M_p je až na pořadí tentýž.

Důkaz. Z definice množiny $M_{p,n}$ plyne, že $m \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ pro všechna $m \in M_{p,n}$. Ukážeme, že všechny prvky $M_{p,n}$ jsou nenulové a žádné dva se nerovnají. Z těchto dvou faktů už bude plynout požadované tvrzení.

a) Pokud by pro nějaké $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ platilo $kn \equiv 0 \pmod p$, znamenalo by to, že kn je dělitelné p. To však není možné, protože $k < p$, a n je s p nesoudělné.

b) Nechť pro nějaká $k, \ell \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ platí $kn \equiv \ell n \pmod p$. (Bez újmy na obecnosti nechť je $k > \ell$.) To však znamená, že $(k-\ell)n$ je dělitelné p, což ovšem (podobně jako v předchozím případě) není možné, protože $k - \ell < p$ a n je s p nesoudělné. □

Cvičení 3.3. Ve značení z předchozího příkladu uvažujte množinu $M_{11} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Ukažte, že jako prvky $M_{11,3}$ dostaneme postupně čísla $3, 6, 9, 1, 4, 7, 10, 2, 5, 8$. Množiny M_{11} a $M_{11,3}$ tedy skutečně obsahují tytéž prvky. Co by se stalo, kdybychom při definici množiny $M_{p,n}$ nevyžadovali nesoudělnost n a p? Zkuste si spočítat, jak by vypadaly například prvky množiny $M_{5,10}$.

Příklad 3.4. Mějme opět množiny M_p a $M_{p,n}$, kde p je prvočíslo a $n \in \mathbb{N}$ nesoudělné s p, jako v úloze 2.3. Protože obě zmíněné množiny obsahují až na pořadí tytéž nenulové prvky, musí být součin všech prvků M_p roven součinu všech prvků $M_{p,n}$. To ovšem podle pravidel modulární aritmetiky a s ohledem na (3.1) znamená, že

$$\begin{aligned} 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1) &\equiv n\cdot 2n\cdot 3n\ldots(p-1)n && \pmod p,\\ (p-1)! &\equiv n^{p-1}(p-1)! && \pmod p. \end{aligned}$$

Odtud plyne poměrně známý vztah $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, viz též [MF].

Literatura

[MF] http://mathworld.wolfram.com/FermatsLittleTheorem.html

[Wil] https://en.wikipedia.org/wiki/Wilson's_theorem

ÚLOHY NA MNOŽINY BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ

David Hruška a Mirko Rokyta

1 Úvod

Jedním ze základních typů geometrických úloh jsou úlohy hledající množinu bodů (případně složitějších objektů) daných vlastností. Například úloha 69-A-I-5 se ptá, *jak pro dané různé body A a O vypadá množina ortocenter (tj. průsečíků výšek) všech trojúhelníků ABC, pro něž je O středem kružnice opsané.* Podobně přímé otázky na množinu bodů daných vlastností nejsou v olympiádních problémech zastoupeny tak často, ale objevují se jako dílčí součásti velmi mnoha úloh. Vezměme si třeba ty konstrukční: máme-li zkonstruovat trojúhelník o daných délkách stran, zvolíme (narýsujeme) úsečku správné délky představující jednu stranu trojúhelníka a jeho třetí vrchol sestrojíme jako průsečík kružnic se středy v prvních dvou vrcholech a odpovídajícími poloměry. Úloha může mít více řešení a také nemusí mít žádné řešení. Při konstrukci využíváme jednoduché pozorování, že množina bodů roviny v pevné vzdálenosti od daného bodu je kružnice. Také v důkazových úlohách často znalosti o důležitých množinách bodů využíváme.

Ve zbytku tohoto textu uvedeme dvě další základní tvrzení a mimo jiné s jejich pomocí vyřešíme několik vesměs jednoduchých, ale zajímavých nebo z hlediska olympiádní geometrie poučných úloh. Nebude-li řečeno jinak, budeme pod *množinou bodů* vždy rozumět množinu bodů v rovině.

2 Teorie

Tvrzení 2.1. *Množina bodů stejně vzdálených od dvou různých bodů A a B je osa úsečky AB, tedy kolmice na AB procházející středem úsečky AB.*

Tvrzení 2.2 (Věta o obvodovém úhlu)**.** *Množina bodů, ze kterých je vidět daná úsečka AB pod daným úhlem φ, je dvojice kružnicových oblouků symetrických podle přímky AB s krajními body A, B. Speciálně pro $\varphi = 90°$ je hledanou množinou kružnice nad průměrem AB.*[5]

[5] Toto tvrzení se obvykle nazývá Thalétova věta.

3 Rozcvička

Následující dvě úlohy neobsahují žádnou netriviální myšlenku, je však na nich dobře vidět, že se nesmíme při hledání všech řešení unáhlit.

Úloha 3.1. *Jsou dány různé body A, B. Najděte množinu všech bodů C tak, aby trojúhelník ABC byl ostroúhlý.*

Řešení. Je snadno vidět, že bod C musí ležet uvnitř pásu daného kolmicemi na úsečku AB vedenými jejími krajními body. Tím ovšem kontrolujeme pouze velikost úhlů CAB a CBA. Z Thalétovy věty plyne, že úhel ACB je ostrý, právě když C leží mimo kruh nad průměrem AB. Odebereme-li tedy tento kruh (včetně hraniční kružnice) ze zmíněného pásu (který rovněž neobsahuje hraniční přímky), dostaneme hledanou množinu. □

Úloha 3.2. *Jsou dány různé body A, B. Najděte všechny přímky p, jejichž vzdálenost od A je stejná jako od B.*

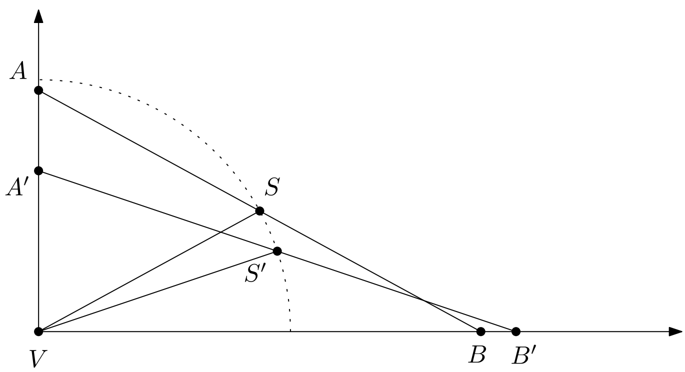
Řešení. Všechny přímky rovnoběžné s AB zřejmě mají danou vlastnost. Jsou to však všechny takové přímky? Nejsou, nesmíme zapomenout na osu úsečky AB. Je teď již výčet kompletní? Označme P_A a P_B po řadě paty kolmic na p vedených body A a B. Daná podmínka je zřejmě ekvivalentní rovnosti $|AP_A| = |BP_B|$. Rozeberme si situaci podle vzájemné polohy bodů A, B a nějaké z hledaných přímek p.

Prochází-li p alespoň jedním z daných bodů, musí to už být samotná přímka AB, aby splňovala danou podmínku. Leží-li A i B ve stejné polorovině dané přímkou p, pak jelikož jsou $\angle AP_AP_B$ a $\angle BP_BP_A$ pravé úhly a $|AP_A| = |BP_B|$, musí být čtyřúhelník ABP_BP_A obdélník, a tedy p musí být rovnoběžná s AB. Pokud A a B leží v různých polorovinách určených přímkou p, označme průsečík přímky p a úsečky AB jako X. Podobně jako v minulém případě dostáváme ze shodnosti pravých a vrcholových úhlů podobnost trojúhelníků XP_AA a XP_BB, která musí být díky podmínce $|AP_A| = |BP_B|$ dokonce shodností. Z $|AX| = |BX|$ plyne, že p musí procházet středem úsečky AB. Jednou takovou přímkou je zmíněná osa úsečky AB, ale zřejmě i všechny ostatní takové přímky splňují zadání. Nyní už můžeme s jistotou prohlásit, že všechny hledané přímky jsou rovnoběžky s AB spolu se všemi přímkami procházejícími středem úsečky AB. □

4 Úlohy

Úloha 4.1. *Po ramenech pravého úhlu se pohybují body A, B tak, že úsečka AB má konstantní délku. Určete množinu všech středů úseček AB.*

Řešení. Z Thalétovy věty plyne, že pro každou polohu bodů A, B leží vrchol V zmíněného pravého úhlu na kružnici nad průměrem AB, jejíž střed (což je zároveň i střed úsečky AB) má od V konstantní vzdálenost rovnou $\frac{|AB|}{2}$. Hledanou množinou je tedy čtvrtkružnice se středem ve V a poloměrem $\frac{|AB|}{2}$, viz obr. 1.

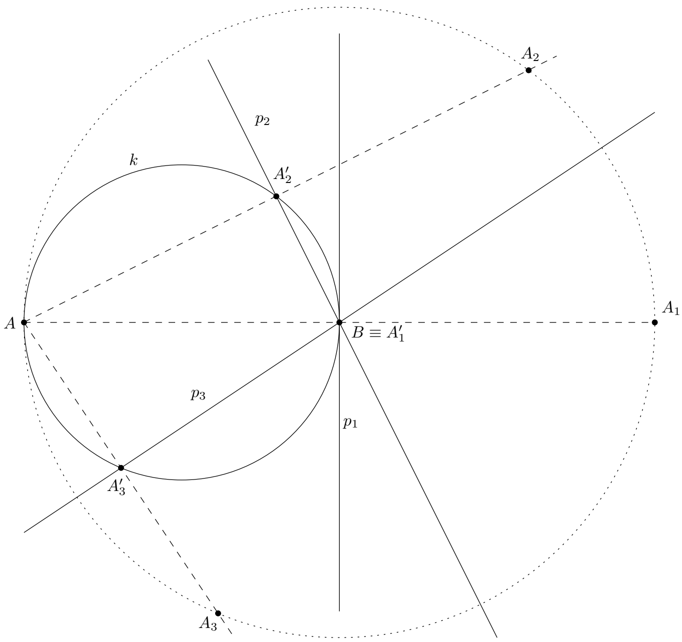


Obr. 1

□

Úloha 4.2. *Je dána úsečka AB. Určete množinu obrazů bodu A v osové souměrnosti podle libovolné přímky procházející bodem B.*

Řešení. Nechť přímka p_1 prochází bodem B, A_1' je pata kolmice z A na p_1 a A_1 je osový obraz A přes p_1, viz obr. 2. Díky definici osové souměrnosti je A_1' je středem úsečky AA_1 a díky pravému úhlu leží na (Thalétově) kružnici nad průměrem AB (označme ji k). Všechny hledané body A_j, získané pomocí přímek p_j tedy dostaneme tak, že dvakrát vzdálíme nějaký bod na kružnici k od bodu A. Geometrické zobrazení, které přesně toto dělá, je *stejnolehlost*, v tomto případě se středem A a koeficientem 2 (někdy se takové zobrazení značí $\mathcal{H}(A, 2)$). Všechny hledané body tedy leží na obrazu k v této stejnolehlosti, což je kružnice se středem v B a procházející bodem A. Nyní musíme ještě ověřit, že každý bod na této kružnici má požadovanou vlastnost. To lze nahlédnout zpětným postupem: pro daný bod X na kružnici $k(B, |AB|)$ vezmeme střed S úsečky AX, který leží na k, takže úhel ASB je pravý, a proto je X obrazem bodu A v osové souměrnosti podle přímky BS. □



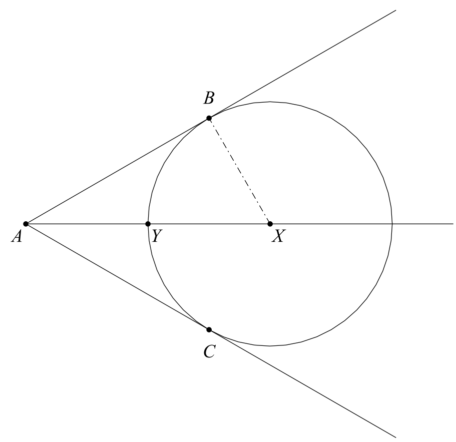
Obr. 2

Úloha 4.3. *Polem vede rovná cesta, po které se rozjel autobus. Kde musí člověk stát, aby autobus dostihl, pokud běží stejnou rychlostí, jakou autobus jede? A co kdyby běžel jen poloviční rychlostí?*

Řešení. Uvažme libovolný bod X na silnici, do kterého autobus teprve dojede ze svého výchozího bodu A, mluvíme tedy o polopřímce AX. Množina bodů, ze kterých lze autobus dostihnout v bodě X, je kruh se středem v X a poloměrem $|AX|$ včetně své hraniční kružnice. Všechny tyto kruhy jsou obsaženy v (té správné) polorovině p dané kolmicí na silnici vedenou bodem A, do které z jeho hraniční přímky (zmíněné kolmice na silnici) započítáme jen bod A. Označme tuto množinu (otevřenou polorovinu a bod A) jako M. Úvahou s kruhy jsme dokázali, že z žádného bodu mimo M nelze autobus dostihnout. Na druhou stranu z každého bodu[6] $B \neq A$ množiny M autobus umíme dostihnout přímým během plnou rychlostí do průsečíku silnice s osou úsečky AB – ten je totiž stejně vzdálen od autobusu jako od dobíhače a leží na silnici ve směru jízdy autobusu.

[6] Stojíme-li v bodě A, tak jsme již ovšem autobus „doběhli“, aniž jsme byli nuceni se pohnout.

Podobný přístup můžeme zvolit i v případě, kdy běžíme poloviční rychlostí než jakou jede autobus. Hledanou množinou je opět sjednocení uzavřených (hraniční kružnici obsahujících) kruhů se středy v bodech X polopřímky, kterou se autobus chystá projet, a s poloměry $|AX|/2$, viz obr. 3a. Pro bod dotyku B (resp. C) tečny, spuštěné na hraniční kružnici z bodu A, platí $|BX| = |CX| = |AX|/2$. Protože je úhel ABX pravý, platí pro úhel $\alpha = \angle BAX$ vztah $\sin\alpha = \frac{|BX|}{|AX|} = \frac{1}{2}$, a tedy $\alpha = 30°$. Označme proto jako M uzavřený úhel (tj. včetně obou jeho ramen) o velikosti $60°$ s vrcholem bodě A, jehož osou je silnice AX.

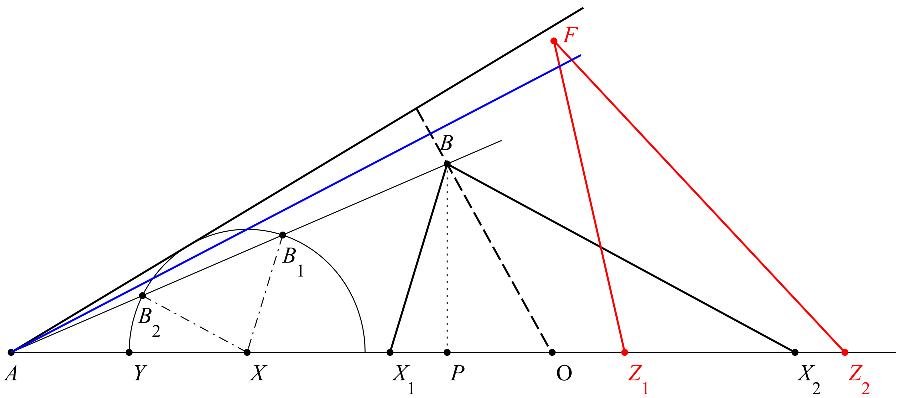


Obr. 3a

Z bodu A lze autobus „dostihnout“ ve stejném smyslu jako jsme zmínili v předchozím případu. Pokud libovolným bodem $B \neq A$ uvnitř či na hranici M vedeme kolmici na (to správné) rameno úhlu, která protne AX v O, snadno podobně jako výše spočítáme, že B leží uvnitř či na hranici kruhu se středem v O a poloměrem $|AO|/2$ (neboli pohybem z B po této kolmici nebudeme v O později než autobus). Pokud na druhou stranu je možno z bodu B dostihnout autobus v bodě O, ležícím na polopřímce AX, je nutně $|BO| \leq |AO|/2$, tedy B leží v uzavřeném kruhu o středu O a poloměru $|AO|/2$, který je však podmnožinou M. $\square$

Poznámka 4.4. Zajímavým doplňujícím problémem je popsat všechny možné přímé cesty, po kterých lze autobus dostihnout z bodu $B \in M \setminus \{A\}$. Pomůžeme si analytickým výpočtem. Zvolme $A = [0, 0]$, označme $B = [b_1, b_2]$ a $x = |AO|$, kde O je bod na ose úhlu, ve kterém je možno autobus dostihnout. Nutnou a postačující podmínkou dostižení autobusu je podle předchozí úlohy $|BO| \leq |AO|/2$, tedy $\sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2} \leq x/2$. To dá po úpravě kvadratickou nerovnici

$3x^2 - 8b_1x + 4(b_1^2 + b_2^2) \leq 0$. Snadno lze spočíst, že příslušná rovnice má reálné kořeny právě tehdy, když $b_1 \geq b_2\sqrt{3}$. To nastává právě tehdy, když $|\angle BAO| \leq 30°$, což je v souladu s výsledkem předchozí úlohy. Za této podmínky má ona kvadratická rovnice dva reálné kořeny (počítáno včetně násobnosti), a sice $x_{1,2} = \frac{4b_1 \pm 2\sqrt{b_1^2 - 3b_2^2}}{3}$. Autobus je tedy možno dostihnout tak, že z bodu B budeme utíkat přímo na jakýkoli bod, ležící na ose úhlu, jehož vzdálenost d od bodu A splňuje $x_1 \leq d \leq x_2$.



Obr. 3b

Na obr. 3b jsou tyto body označeny X_1, X_2 a cesta z bodu B (který leží uvnitř M), po které autobus dostihneme, je tedy jakákoli úsečka, ležící uvnitř uzavřeného trojúhelníku X_1BX_2, s počátečním bodem B, končící na polopřímce AX. Pro obě „krajní dráhy“ BX_1, BX_2 platí $|BX_j| = |AX_j|/2$, $j = 1, 2$, a můžeme je také zkonstruovat geometricky (viz obr. 3b): sestrojíme kružnici k o poloměru $|AX|/2 = |AY|$ se středem v X. Protože polopřímka AB leží uvnitř množiny M, protne k ve dvou bodech, B_1 a B_2. Bodem B vedeme rovnoběžky s úsečkami B_1X resp. B_2X a označíme jejich průsečíky s polopřímkou AX jako X_1 resp. X_2. Z konstrukce je $|B_2X| = |AX|/2$ a protože trojúhelníky AXB_2 a AX_2B jsou podobné, je $|BX_2| = |AX_2|/2$, a podobně $|BX_1| = |AX_1|/2$.

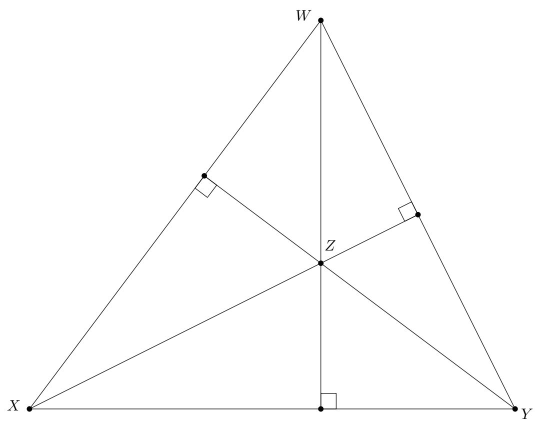
Je možné se také pobavit o „nejkratší přímé cestě“, po které lze autobus dostihnout. Pokud je první souřadnice bodu X_1 menší nebo rovna b_1, je jí cesta po kolmici BP, spuštěné z B na polopřímku AX. V opačném případě je touto nejkratší přímou cestou cesta po BX_1 (na obrázku je tato situace zachycena červenou barvou), kde roli bodu B hraje bod F: trojúhelníkem všech možných přímých cest k autobusu z bodu F je ΔZ_1FZ_2 a onou nejkratší cestou je FZ_1. Tato situace nastává, pokud je tangens úhlu FAX větší než $1/2$, což odpovídá úhlu $\omega \approx 26°33'54''$

(jeho rameno je na obrázku zachyceno modře). Pokud je tedy velikost úhlu BAX mezi 0 a ω, je nejefektivnější cestou k autobusu cesta po kolmici typu BP, pro velikost $\angle BAX$ mezi ω a 30° je to cesta „typu BX_1“.

Úloha 4.5. *Jsou dány různé body A, B a H, neležící v přímce. Najděte množinu všech bodů C tak, aby bod H byl průsečíkem výšek trojúhelníku ABC.*

Řešení. Uvažme libovolný trojúhelník XYZ a jeho průsečík výšek W a povšimněme si zajímavé symetrie této konfigurace: kdykoliv vybereme jeden z bodů X, Y, Z a W, bude vždy průsečíkem výšek v trojúhelníku s vrcholy ve zbylých třech bodech (viz obr. 4). Je tomu tak proto, že při záměně vybraného bodu za jiný se dvě strany v původní konfiguraci změní na výšky a naopak. Navíc právě v jednom případě dostaneme trojúhelník ostroúhlý s průsečíkem výšek uvnitř.

Co z toho vyplývá pro naši úlohu? Když vezmeme libovolný bod C vyhovující zadání a aplikujeme výše uvedené pozorování na čtveřici A, B, C a H, dostaneme, že bod C musí být průsečíkem výšek trojúhelníku ABH, který je daný. Hledanou množinou je tedy tento jediný bod. □

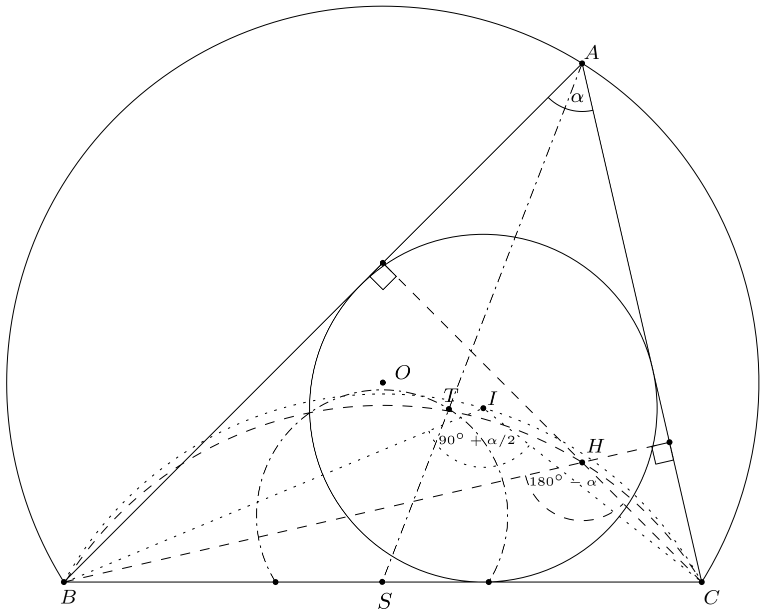


Obr. 4

Úloha 4.6. *Bod A probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou BC. Určete množinu středů kružnic opsaných, středů kružnic vepsaných, těžišť a ortocenter všech takových trojúhelníků ABC.*

Řešení. Střed kružnice opsané je zřejmě během pohybu bodu A pevný a je jím střed kružnice, jejíž část bod A obíhá. Střed kružnice vepsané je průsečíkem os úhlů $\angle ABC$ a $\angle ACB$, z čehož spočítáme, že (při standardním značení vnitřních úhlů v ΔABC) platí $|\angle BIC| =$

$180° - (\beta/2 + \gamma/2) = 90° + \alpha/2$. Množinou všech středů kružnic vepsaných je tedy oblouk nad BC odpovídající úhlu $90° + \alpha/2$. Těžiště, jak známo, leží v jedné třetině těžnice SA blíže ke středu S strany BC. Množinou těžišť je tedy kružnicový oblouk, který je obrazem oblouku probíhaného bodem A ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S, 1/3)$ se středem v S a koeficientem $1/3$. Z pravých úhlů u pat výšek na strany AB a AC dopočítáme, že $|\angle BHC| = 180° - \alpha$, takže průsečík výšek probíhá oblouk nad BC odpovídající obvodovému úhlu $180° - \alpha$. Viz obr. 5. □



Obr. 5

Literatura

Další úlohy na toto téma lze nalézt například v textu

[JT] J. Tkadlec: *Geometrické množiny bodů*, dostupné z: `https://mks.mff.cuni.cz/library/GeometrickeMnozinyBoduJT/GeometrickeMnozinyBoduJT.pdf`.

DĚLITELNOST A PRVOČÍSLA

Mirko Rokyta

1 Úvod a trocha teorie

Úlohy na téma „dělitelnost“ patří v kontextu MO k poměrně častým. Nikoli překvapivě je toto téma často propojeno s tématem prvočísel. Je tomu tak i v případě úlohy 69-A-I-6 matematické olympiády, která má následující zadání:

Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel[7] *takových, že součin*

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$$

je roven mocnině některého prvočísla.

I když většina čtenářů pravděpodobně zná jak následující definici, tak pod ní uvedená pravidla, nebude možná na škodu, když si je připomeneme.

Definice 1.1. Buďte $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Řekneme, že *a dělí b*, a píšeme $a \mid b$, pokud existuje $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $na = b$.

Tvrzení 1.2 (Pravidla pro zacházení se symbolem „$\mid$“)**.** *Pokud není řečeno jinak, předpokládáme, že $a, b, c \in \mathbb{Z}$, přičemž o všech těchto číslech, pokud se nacházejí nalevo od symbolu „$\mid$“, předpokládáme navíc, že jsou nenulová. Potom platí:*

(P1) *Pokud $a \mid b$, tak $a \mid kb$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.*
(P2) *Pokud $a \mid b$, a zároveň $b \mid c$, tak $a \mid c$.*
(P3) *Pokud $a \mid b$, a zároveň $a \mid c$, tak $a \mid (b + c)$, a také $a \mid (b - c)$.*
(P4) *Pokud $a \mid (b + c)$ nebo $a \mid (b - c)$, a zároveň $a \mid b$, tak také $a \mid c$.*
(P5) *Pokud $a \mid bc$, kde a, b jsou nesoudělná (speciálně pokud a, b jsou* různá *prvočísla) tak $a \mid c$.*

Důkaz. Pokud $a \mid b$, tak existuje $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $na = b$. Pak ovšem $kna = kb$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$, což dokazuje (P1). Všimněme si speciálně, že vždy $a \mid 0$ (pro $a \neq 0$; nulou pochopitelně nedělíme nikdy). Důkazy

[7] Zde by se dala použít ekvivalentní formulace „Najděte všechny trojice a, b, c přirozených čísel“. Přestože se standardně nula za přirozené číslo nepovažuje, je v úloze uvedená formulace „bezpečnější“.

(P2) a (P3) jen naznačíme: $na = b$ a $mb = c$ implikuje $mna = c$, což dokazuje (P2), a implikace $na = b$ & $ma = c \Rightarrow (n \pm m)a = b \pm c$ dokazuje (P3).[8] Při důkazu (P4) pomůže rovnost $a \,\big|\, c = (b+c) - b$ resp. $a \,\big|\, c = b - (b - c)$ a aplikace pravidla (P3). Na pravidlo (P5) lze nahlížet i tak, že zlomek $\frac{bc}{a}$ lze krátit a že výsledkem je celé číslo. Protože a, b jsou nesoudělná, musí se „a celé vykrátit proti c“. $\square$

V dalším textu se budeme zabývat několika typickými úlohami, ve kterých většinou uvedená pravidla či definici uplatníme. Čtenář se může více o dělitelnosti dozvědět například ve [Wiki].

2 Příklady

Úloha 2.1. *Pro přirozená čísla a, b taková, že $a > 1$, $b > 1$, platí*

$$(a + ab + b) \,\big|\, (a + 2b)(b + 2a). \tag{2.1}$$

Ukažte, že číslo $a + ab + b$ je složené.

Řešení. Předpokládejme, že $a+ab+b$ je prvočíslo. Potom $a+ab+b$ dělí jedno z čísel $a + 2b$, $b + 2a$. Protože úloha je symetrická v a, b, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že například $a + ab + b \,\big|\, a + 2b$, tedy že existuje přirozené k, takové, že $k(a + ab + b) = a + 2b$. To po úpravě dává

$$(k - 1)a + (k - 2)b + kab = 0\,. \tag{2.2}$$

Pro $k > 2$ dostaneme na levé straně výrazu (2.2) kladné číslo; tedy je buď $k = 1$ nebo $k = 2$. Pro $k = 2$ je ale na levé straně výrazu (2.2) $a + 2ab > 0$, zatímco pro $k = 1$ obdržíme z (2.2) rovnici

$$-\,b + ab = b(a - 1) = 0\,.$$

To však pro $a > 1$, $b > 1$ nemůže nastat. Předpoklad, že $a + ab + b$ je prvočíslo, vedl vždy k situaci, která nemůže nastat, a proto je číslo $a + ab + b$ (pokud takové, které vyhovuje zadání úlohy, existuje) číslem složeným.

Přesvědčme se tedy ještě o tom, že situace, kterou úloha popisuje, může nastat, tedy že existují přirozená čísla $a > 1$, $b > 1$ splňující (2.1). Není příliš obtížné nalézt několik takových dvojic, například $(a, b) = (2, 6)$ nebo $(a, b) = (3, 15)$, atd. Jako doplňující otázku si čtenář může rozmyslet, proč je úloha omezena podmínkami $a > 1$, $b > 1$. $\square$

[8] Čtenáři doporučujeme, aby si tyto, stejně jako všechny další úvahy tohoto důkazu provedl jako cvičení podrobně/formálně, například i s diskusí co kde muže nabývat nulové hodnoty a jestli to nějak omezuje platnost příslušných pravidel.

Úloha 2.2 (55-B-II-1). *Určete, pro které dvojice prvočísel p, q platí $p + q^2 = q + p^3$.*

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $p = q$. Pak $p + p^2 = p + p^3$, neboli $1 = p$, což ovšem není prvočíslo. V dalším tedy můžeme předpokládat, že $p \neq q$. Upravíme $p + q^2 = q + p^3$ na $q^2 - q = p^3 - p$, neboli

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1)\,. \tag{2.3}$$

Odtud plyne, že $p \mid q(q-1)$ a tedy podle pravidla (P5) $p \mid (q-1)$. Proto je splněna nerovnost

$$p \leq q - 1\,. \tag{2.4}$$

Z (2.3) dále vidíme (opět se zvážením pravidla (P5)), že q dělí jedno z čísel $p-1$, $p+1$. Z nerovnosti (2.4) plyne, že q je příliš velké na to, aby mohlo dělit $p-1$, tedy q musí dělit $p+1$. Odtud pak plyne nerovnost

$$q \leq p + 1\,. \tag{2.5}$$

Nerovnosti (2.4), (2.5) ovšem implikují $q = p + 1$, což znamená, že p, q jsou dvě po sobě jdoucí prvočísla. Taková situace nastává právě jen pro prvočísla $p = 2$, $q = 3$, což je tedy jediné řešení úlohy. □

Úloha 2.3. *Najděte všechna navzájem různá prvočísla p, q, r, splňující:*

$$\begin{aligned} p &\mid (q+r),\\ q &\mid (p+r),\\ r &\mid (3p+q). \end{aligned}$$

Řešení. Protože jde o různá prvočísla, je jedno z nich vždy největší. Úlohu budeme diskutovat vzhledem k tomu, které z nich to je.

- Je-li p největší z p, q, r, pak $q + r < 2p$, což spolu s $p \mid (q+r)$ implikuje, že $q + r = p$. Potom ovšem $p + r = q + 2r$, tedy $q \mid (p+r)$ přejde v $q \mid (q+2r)$, odkud $q \mid 2r$ podle pravidla (P4). Podle pravidla (P5) je tedy $q = 2$. Proto je $p = r + 2$, tedy $r \mid (3p+q) = 8 + 3r$, odkud dle pravidla (P4) plyne $r \mid 8$, tedy $r = 2 = q$, což je však ve sporu s tím, že má jít o různá prvočísla.
- Je-li q největší z p, q, r, lze postupovat stejně jako v předchozím případě – dokud využíváme jen první dva vztahy ze zadání úlohy (které jsou symetrické vůči p a q), stačí pouze ve všech úvahách prohodit roli p a q. Dostaneme se tedy až do situace, kdy $p = 2$ a $q = r + 2$. Pak ovšem $r \mid (3p+q) = 8 + r$, odkud ale opět dle pravidla (P4) plyne $r \mid 8$; tedy je $r = 2 = p$, a to je zase ve sporu s tím, že má jít o různá prvočísla.

- Je-li r největší z p, q, r, je $3p+q < 4r$ a protože $r \mid (3p+q)$, mohou nastat pouze tři situace: (a) $3p+q = 3r$, (b) $3p+q = 2r$, a konečně (c) $3p+q = r$.
  (a) $3p+q = 3r$ implikuje $q = 3(r-p)$, což říká, že prvočíslo q je násobkem tří. To ovšem nutně znamená, že $q = 3$ a $r-p = 1$. Jediná dvě prvočísla, která se liší o jedničku, jsou 2 a 3, což znamená $r = 3 = q$, tedy nejde o tři různá prvočísla.
  (b) $3p+q = 2r$: protože $q \mid (p+r)$, je i $q \mid 2(p+r) = 2p+2r = 2p+3p+q = 5p+q$, což podle pravidla (P4) znamená, že $q \mid 5p$ a tedy dle pravidla (P5) je $q = 5$. Protože dále $p \mid (q+r)$, je i $p \mid 2(q+r) = 10+2r = 10+3p+5 = 15+3p$, což podle pravidla (P4) znamená, že $p \mid 15$, a protože p je různé od q, je $p = 3$. Pak je ovšem $r = (3p+q)/2 = 7$ a snadno se lze přesvědčit, že trojice $(p, q, r) = (3, 5, 7)$ skutečně splňuje zadání úlohy.
  (c) $3p+q = r$ implikuje $p \mid (q+r) = 2q+3p$, tedy dle pravidla (P4) je $p \mid 2q$. To ovšem podle pravidla (P5) znamená, že $p = 2$. Dále je $q \mid (p+r) = q+8$ odkud plyne, že $q \mid 8$, tedy i $q = 2$ a opět nejde o tři různá prvočísla.

Závěr: $(p, q, r) = (3, 5, 7)$ je jediným řešením úlohy. □

Poznámka 2.4. Zcela stejným postupem lze vyřešit i úlohu nalézt různá prvočísla p, q, r, splňující

$$p \mid (q+r), \quad q \mid (r+2p), \quad r \mid (p+3q),$$

s trochu odlišnou diskusí, neboť tato úloha má tři různá řešení. Čtenáři doporučujeme si jako cvičení tuto úlohu vyřešit samostatně. Pokud by nastaly nějaké problémy při hledání všech tří řešení, může pomoci to, že úlohu lze nalézt pod označením MO-55-A-III-5.

Úloha 2.5. *Pro $n \in \mathbb{N}$ platí, že $2n+1$ i $3n+1$ jsou druhé mocniny nějakého přirozeného čísla. Ukažte, že $5n+3$ je číslo složené.*[9]

Řešení. Jsou-li $k, m \in \mathbb{N}$ taková, že $k^2 = 2n+1$, $m^2 = 3n+1$, můžeme psát

$$5n+3 = 4(2n+1) - (3n+1) = 4k^2 - m^2 = (2k-m)(2k+m).$$

[9] Autorem úlohy je Rado Švarc, viz [MKS, Úloha 5]. Úlohy z uvedeného odkazu doporučujeme čtenáři jako další úlohy na téma „prvočísla a dělitelnost."

Číslo $5n+3$ jsme napsali jako součin dvou celých čísel, to však ještě neznamená, že je to číslo složené. K tomu zbývá ukázat, že žádné z čísel $(2k-m)$, $(2k+m)$ není rovno jedné.

Podle zadání úlohy je $k, m \in \mathbb{N}$, a tedy $2k+m$ je určitě ostře větší než jedna. Předpokládejme tedy pro spor, že $2k-m=1$. Pak $5n+3 = 1\cdot(2k+m) = 1+2m$, tedy je $5n+2 = 2m$. Současně však je $m^2 = 3n+1$, máme tedy soustavu dvou rovnic pro n, m, kterou lze řešit některým z oblíbených způsobů. Dostaneme dvě řešení, a sice $(m,n) = (\frac{1}{5}, -\frac{8}{25})$ a $(m,n) = (1,0)$. První řešení nedává celočíselná m, n a druhé z nich nevyhovuje podmínce $n \in \mathbb{N}$. Tím je úloha vyřešena.

Všimněme si že pro $n=0$ dostáváme $k=m=1$; čísla $2n+1=1$ i $3n+1=1$ jsou sice druhé mocniny nějakého přirozeného čísla, ale $5n+3=3$ není číslo složené. □

Úloha 2.6 (68-A-I-3/D2)**.** *Najděte všechna přirozená čísla x taková, že x^2+x-2 je mocnina dvou.*

Řešení. Mocnina dvou je typicky součinem. Je proto dobrou strategií zkusit napsat x^2+x-2 také jako součin. Což lze:

$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)\,.$$

Má-li být x^2+x-2 mocninou dvojky, musí být i každé z čísel $x+2$ a $x-1$ mocninou dvojky:

$$\begin{aligned} x+2 &= 2^k \qquad && \text{pro nějaké } k \in \mathbb{N}\cup\{0\},\\ x-1 &= 2^m \qquad && \text{pro nějaké } m \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $x = 2^k-2 = 2^m+1$, z čehož dále plyne $2^k-2^m=3$. Hledáme tedy dvě mocniny dvojky, vzdálené od sebe o hodnotu 3. Mocniny dvojky vypadají takto: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$, z čehož snadno usoudíme, že jediné dvě mocniny dvojky, vzdálené od sebe o hodnotu 3, jsou 1 a 4. Tedy máme $2^k=4$ a $2^m=1$, což dá $x = 2^2-2 = 2^0+1 = 2$, čili jediné řešení naší úlohy je $x=2$. □

Literatura

[MKS] `https://mks.mff.cuni.cz/archive/36/komplet2p.pdf`

[Wiki] `https://cs.wikipedia.org/wiki/D%C4%9Blitelnost`

Kategorie

B

NEROVNOSTI A CO S NIMI

Luboš Pick

MOTTO: *Mezi každými dvěma zvířaty se najde nějaká nerovnost.*

(George Orwell a já)

V tomto textu se zaměříme na několik užitečných nerovností a některé jejich zajímavé aplikace. Úloha 69-B-I-1 matematické olympiády zní takto:

V reálném oboru uvažujme soustavu rovnic

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$
$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

s nenulovým reálným parametrem a.

a) Nalezněte všechny hodnoty a, pro které má uvedená soustava řešení.

b) Dokažte, že pro libovolné řešení (x, y) této soustavy platí

$$x^2 + |y| \geq 4\,.$$

1 Chvála pozitivního myšlení

Nejkrásnější nerovnost na světě je tato:

$$x^2 \geq 0 \tag{1.1}$$

pro každé reálné číslo x. Její krása spočívá v tom, že nás vybízí k pozitivnímu pohledu na svět. Kromě své nepopíratelné elegance oplývá ale rovnice (1.1) také významnou silou, která není na první pohled zřejmá. Na to, že je v podstatě triviální, jsou její důsledky ohromující. Dosadíme-li například do (1.1) výraz $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, kde a, b jsou libovolná nezáporná reálná čísla, dostaneme

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \tag{1.2}$$

Nerovnost (1.2) již triviální není. Řekneme-li, že jde o speciální případ jisté známé a důležité rovnosti, může si ctěný čtenář tipnout, jaké. Možných zobecnění je totiž více. Jednou možností je *Youngova nerovnost*, která tvrdí, že

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.3}$$

pro každá a, b reálná a nezáporná a každá $p, q \in (1, \infty)$ splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Další možností je *Jensenova nerovnost*, která říká, že je-li f konvexní reálná funkce, $x_1, \ldots, x_n$ jsou prvky jejího definičního oboru a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou libovolná kladná čísla, pak

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \tag{1.4}$$

Předpokládám nicméně, že čtenář tipoval ještě jinou nerovnost, která je přímým zobecněním nerovnosti (1.1), a sice nejspíše nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, obvykle nazývanou prostě *AG-nerovnost*. Připomeňme si, že *aritmetickým průměrem* n-tice čísel $x_1, \ldots, x_n$ nazýváme hodnotu

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

zatímco *geometrickým průměrem* téže n-tice čísel hodnotu

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

AG-nerovnost nám říká, že hodnota aritmetického průměru vždy převyšuje hodnotou jeho geometrického kolegy a v krajních případech se mohou obě hodnoty rovnat. Nenalezneme však na tomto světě n-tici čísel, jejíž geometrický průměr by byl větší než průměr aritmetický. Vyjádřeno matematicky, platí

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \tag{1.5}$$

pro každá $x_1, \ldots, x_n$ reálná a nezáporná. O AG-nerovnosti toho bylo napsáno hodně a množství jejích vesměs rozličných důkazů vyskytující se v literatuře je velmi rozsáhlé. Záleží na tom, co smíme či nesmíme použít. Máme-li k dispozici například luxus logaritmické funkce, pak je AG-nerovnost snadným důsledkem Jensenovy nerovnosti (1.4) a konkavity logaritmu. Jenomže logaritmus nelze zavést bez prostředků kalkulu, a tedy takový důkaz není zrovna elementární, i když vypadá přímočaře. Notoricky známý je důkaz AG-nerovnosti využívající v prvním kroku dyadickou matematickou indukci a ve druhém kroku zpětnou matematickou indukci. Ukážeme ještě jiný důkaz, založený na jisté formě homogenizace, která se může hodit i jinde. Nejprve dokážeme důležitý pomocný výsledek.

Lémma 1.1. *Nechť n je přirozené číslo a $x_1, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla splňující*

$$x_1 \cdots x_n = 1. \tag{1.6}$$

Potom

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n. \tag{1.7}$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť n je přirozené číslo a předpokládejme, že tvrzení platí pro n. Nechť $x_1, \ldots, x_{n+1}$ jsou kladná reálná čísla splňující

$$x_1 \cdots x_{n+1} = 1.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že čísla $x_1, \ldots, x_{n+1}$ jsou seřazena tak, že

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1}.$$

Potom platí $x_1 \leq 1$ a $x_{n+1} \geq 1$. Protože

$$x_2 \cdot x_3 \cdots x_n \cdot (x_{n+1} \cdot x_1) = 1,$$

plyne z indukčního předpokladu, že

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_n + (x_{n+1} \cdot x_1) \geq n.$$

Tedy

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} &\geq n + x_{n+1} + x_1 - x_{n+1}x_1 \\ &= n + x_{n+1}(1 - x_1) + x_1 \\ &= n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \\ &\geq n + 1. \end{aligned}$$

$\square$

Nyní již můžeme vcelku snadno dokázat AG-nerovnost, a ještě ji přitom obohatíme o jeden prvek navíc.

Věta 1.2 (AGH-nerovnost)**.** *Nechť n je přirozené číslo a $x_1, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla. Označme*

$$A_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$
$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\,,$$
$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Potom

$$A_n \geq G_n \geq H_n. \tag{1.8}$$

Důkaz. Vezmeme-li pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ místo x_i hodnotu $\frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$, pak platí (1.6). Podle lémmatu 1.1 tedy platí také (1.7). Odtud ihned plyne první nerovnost v (1.8), tedy $A_n \geq G_n$. Druhá nerovnost v (1.8), tedy $G_n \geq H_n$, plyne z již dokázané první nerovnosti pomocí jednoduché substituce $x_i \mapsto \frac{1}{x_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. □

Výraz H_n z předcházející věty budeme nazývat *harmonickým průměrem* čísel $x_1, \dots, x_n$.

Věta 1.3. *Nechť n je přirozené číslo a $x_1, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla splňující $\sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1$. Potom platí*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

Důkaz. Nerovnost bezprostředně plyne z nerovnosti $H_n \leq A_n$ obsažené v (1.8). □

Užitečný speciální případ AG-nerovnosti je obsažen v následujícím pozorování.

Věta 1.4. *Nechť n je přirozené číslo a x je kladné reálné číslo. Potom platí*

$$x^n + \frac{n}{x} \geq n + 1. \tag{1.9}$$

Důkaz. Podle (1.8) platí (n sčítanců):

$$x^n + \frac{n}{x} = x^n + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{x^n \cdot \frac{1}{x} \cdots \frac{1}{x}} = n + 1.$$

□

Věta 1.4 skýtá užitečné nerovnosti typu $x^3 + \frac{3}{x} \geq 4$, které se často hodí při řešení složitějších úloh. V této souvislosti samozřejmě vzniká otázka, jak máme na vhodnou úpravu výrazu $x^3 + \frac{3}{x}$ přijít – měl by nám být nápovědou faktor 3.

Jedním z nesčetných důležitých důsledků věty 1.2 je následující speciální případ takzvané *Bernoulliovy nerovnosti.*

Věta 1.5 (Bernoulliova nerovnost)**.** *Nechť n je přirozené číslo a x je kladné reálné číslo. Potom platí*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.10}$$

Důkaz. Z AG-nerovnosti plyne, že

$$\sqrt[n]{(1+nx)\cdot 1 \cdots 1} \leq 1 + x \quad ((n-1) \text{ jedniček pod odmocninou}).$$

□

Je třeba přiznat, že věta 1.5 neudává Bernoulliovu nerovnost v plné síle. Ta totiž platí nejen pro x kladné, ale dokonce až pro $x \in (-2, \infty)$. Důkaz tohoto tvrzení a další detaily čtenář nalezne například v [R], kde je toto téma velmi pěkně zpracováno.

Dalším důležitým důsledkem lémmatu 1.1 je následující takzvaná *permutační nerovnost.*

Věta 1.6 (permutační nerovnost)**.** *Nechť n je přirozené číslo a $x_1, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla. Nechť*

$$\pi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

je bijekce. Potom platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{\pi(i)}} \geq n. \tag{1.11}$$

Důkaz. Vezmeme-li pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ místo x_i hodnotu $\frac{x_i}{x_{\pi(i)}}$, pak platí (1.6). Podle lémmatu 1.1 tedy platí také (1.7). Odtud ihned plyne (1.11). □

Důležitým speciálním případem permutační nerovnosti (nebo nerovnosti (1.9), můžeme si vybrat) je nerovnost

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \tag{1.12}$$

která platí pro každé kladné reálné číslo x. Jsme-li vyzbrojeni nerovností (1.12), pak bychom neměli mít žádné potíže s úlohami následujícího typu.

Úloha 1.7. *Nechť x, y, z, w jsou kladná reálná čísla. Potom platí*

$$(xy + zw)\left(\frac{1}{xz} + \frac{1}{yw}\right) \geq 4.$$

Pozitivní myšlení uplatníme ještě jednou, a to v důkazu následující důležité nerovnosti.

Věta 1.8 (Cauchyova nerovnost)**.** *Nechť n je přirozené číslo a $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_n$ jsou reálná čísla. Potom platí*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2. \tag{1.13}$$

Důkaz. Podle (1.1) pro každé reálné číslo x platí

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k x + y_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Protože kvadratická funkce na pravé straně předcházející nerovnosti je nezáporná pro každé reálné číslo x, plyne z definice diskriminantu kvadratické rovnice, že

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \leq 0,$$

což je dokazovaná nerovnost vynásobená čtyřmi. □

Nejkrásnější nerovnost na světě, tedy (1.1), nalézá široké uplatnění při vyšetřování, pro které hodnoty parametru má řešení jistá soustava rovnic. Posuďme následující úlohu.

Úloha 1.9. *Určete, pro které (reálné) hodnoty parametru a má soustava rovnic*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a \\ 3x^2 + 2y^2 &= a^2 \end{aligned}$$

pro neznámé x, y řešení v oboru reálných čísel.

Řešení. Nejprve soustavu upravíme na tvar

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 &= 3a \\ 3x^2 + 2y^2 &= a^2 \end{aligned}$$

a druhou rovnici odečteme od první. Dostaneme vztah

$$y^2 = 3a - a^2,$$

ze kterého pomocí (1.1) dostaneme

$$3a - a^2 \geq 0,$$

a tedy

$$a \in [0, 3].$$

Nyní obdobně upravíme soustavu na tvar

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 &= 2a \\ 3x^2 + 2y^2 &= a^2 \end{aligned}$$

a první rovnici odečteme od druhé. Dostaneme vztah

$$x^2 = a^2 - 2a,$$

ze kterého pomocí (1.1) dostaneme

$$a^2 - 2a \geq 0,$$

a tedy

$$a \in \mathbb{R} \setminus (0, 2).$$

Protože musí platit obě podmínky zároveň, soustava má řešení právě tehdy, když $a \in \{0\} \cup [2, 3]$. □

Povšimněme si, že v zadání úlohy 1.9 sice nebylo výslovně uvedeno, že bychom měli soustavu vyřešit, nicméně z našeho postupu je zřejmé, že za podmínky $a \in [2, 3]$ je řešením některá kombinace hodnot $x = \pm\sqrt{a^2 - 2a}$ a $y = \pm\sqrt{3a - a^2}$ a za podmínky $a = 0$ je řešením $x = y = 0$.

2 Liberté, égalité, fraternité

Jednou ze základních otázek, které je třeba si klást v souvislosti s nerovnostmi, je kdy (přesněji pro které proměnné) v dané nerovnosti platí rovnost. Například nerovnost (1.1) přechází v rovnost právě tehdy, když $x = 0$. Odtud ihned plyne, že v nerovnosti (1.2) platí rovnost právě tehdy, když $a = b$. V nerovnosti (1.3) nastává rovnost právě tehdy, když $b = a^{p-1}$. Podobně lze snadno ukázat, že v nerovnosti (1.5) platí rovnost právě tehdy, když

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

V nerovnosti (1.12) nastává rovnost právě tehdy, když $x=1$. V nerovnostech (1.7) a (1.9) nastává rovnost právě tehdy, když $x_1 = \cdots = x_n = 1$. U nerovností (1.4), (1.10), (1.11) a (1.13) je situace složitější.

Řekneme, že nerovnost tvaru

$$V_1(x_1, \ldots, x_n) \leq V_2(x_1, \ldots, x_n)$$

je *nasycená* (*saturovaná*), jestliže existují nějaké prvky $y_1, \ldots, y_n$, pro které dávají výrazy $V_1(y_1, \ldots, y_n)$ a $V_2(y_1, \ldots, y_n)$ smysl, a přitom platí

$$V_1(y_1, \ldots, y_n) = V_2(y_1, \ldots, y_n).$$

Informace o nasycenosti dané nerovnosti má velký význam z několika důvodů. Saturace nerovnosti je prvním a základním ukazatelem její kvality. Není-li nerovnost nasycená, pak obvykle jde o příliš hrubý odhad, který si možná u některé konkrétní úlohy můžeme dovolit, ale jindy by se nám mohl vymstít. U nasycených nerovností naopak víme, že v podstatě nemá smysl se pokoušet o nějaké jejich pronikavé zlepšení. Abychom tuto poznámku ale nechápali nesprávně, uveďme následující pozorování. To, že je nějaká nerovnost nasycená, ještě neznamená, že pro určité speciální případy nelze mezi její levou a pravou stranu vmáčknout nějaký zajímavý netriviální výraz. Posuďme například následující úlohu.

Úloha 2.1. *Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}. \tag{2.1}$$

Dvojí nerovnost tvaru (2.1) budeme nazývat *sendvičem.* Také sendvič samozřejmě může, nebo nemusí, být nasycený, a to dokonce jednostranně, nebo oboustranně. Například sendvič (1.8) je oboustranně nasycen, a to jakoukoli konstantní n-ticí kladných čísel.

V rámci řešení úlohy 2.1 nejprve dokážeme následující (obecnější) větu.

Věta 2.2 (sendvič pro aritmetickou posloupnost)**.** *Nechť* $\{x_n\}$ *je aritmetická posloupnost kladných reálných čísel. Potom*

$$\sqrt{x_1 x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_n}{2}. \tag{2.2}$$

Důkaz. Druhá nerovnost sendviče (2.2) je přímým důsledkem nerovnosti $G_n \leq A_n$ a vzorce pro součet členů aritmetické posloupnosti. První nerovnost dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ je nerovnost zřejmá. Předpokládejme, že nerovnost platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy že platí

$$(x_1 x_n)^n \leq (x_1 \cdots x_n)^2.$$

Dle indukčního předpokladu jest

$$(x_1 x_{n+1})^{n+1} \leq (x_1 \cdots x_n)^2 x_1 \frac{x_{n+1}^{n+1}}{x_n^n}.$$

Tedy stačí dokázat, že

$$x_1 \frac{x_{n+1}^{n+1}}{x_n^n} \leq x_{n+1}^2.$$

Poslední nerovnost lze přepsat ve tvaru

$$x_1 \left(1 + \frac{d}{x_1 + (n-1)d}\right)^{n-1} \leq x_1 + (n-1)d.$$

Tuto nerovnost již lze snadno ověřit indukcí. □

Řešení úlohy 2.1. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ položme $x_i = i$. Potom $\{x_i\}$ tvoří aritmetickou posloupnost kladných reálných čísel. Nerovnost (2.1) tedy bezprostředně vyplývá z nerovnosti (2.2). □

Informace o nasycenosti nějaké nerovnosti má velký význam při řešení úloh vedoucích na nalezení extrémů určitých výrazů.

Úloha 2.3. *Nalezněte nejmenší hodnotu výrazu* $\sum_{k=1}^n x_k^2$ *za podmínky* $\sum_{k=1}^n x_k = 1$*, kde* n *je přirozené číslo a* $x_1, \ldots, x_n$ *jsou kladná reálná čísla.*

Řešení. Z Cauchyovy nerovnosti plyne, že

$$1 = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n 1^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = n \sum_{k=1}^n x_k^2. \tag{2.3}$$

Odtud vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Rovnost v nerovnosti (2.3) nastává pro

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}.$$

Hledanou nejmenší hodnotou je tedy $\frac{1}{n}$. □

Řešení úlohy 2.3 je názornou ukázkou, jak u takových úloh obvykle postupujeme. Povšimněme si, že řešení má dva kroky, a sice odhad a jeho nasycení. Nejprve se snažíme získat nějaký rozumný (ne moc hrubý) odhad nejlépe pomocí nějaké nerovnosti, jejíž nasycenost je nám známa. Poté, co takový odhad získáme, se jej snažíme nasytit, tedy nalézt přípustné hodnoty proměnných, pro které odhad přechází v rovnost.

Úloha 2.4. *Nalezněte nejmenší hodnotu výrazu*

$$V(x) = 2x^4 + \frac{2}{1+4x^4},$$

kde x je reálné číslo, a určete, pro která reálná čísla x výraz $V(x)$ této hodnoty nabývá.

Řešení. Výraz nejprve upravíme do tvaru

$$V(x) = \frac{1+4x^4}{2} + \frac{2}{1+4x^4} - \frac{1}{2}.$$

Z nerovnosti (1.12) pak plyne, že pro každé reálné číslo x platí

$$V(x) \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \tag{2.4}$$

Z informací o nasycenosti nerovnosti (1.12) je rovnost v ní nastává právě tehdy, když je proměnná v ní vystupující rovna jedné. Odtud plyne, že rovnost v (2.4) nastává právě tehdy, když

$$\frac{2}{1+4x^4} = 1,$$

tedy právě pro $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Úloha 2.5. *Nalezněte nejmenší hodnotu výrazu*

$$V(x,y) = 6x^2 + y^2 - 4xy + 4x + 3,$$

kde x, y jsou reálná čísla, a určete, pro která x, y výraz $V(x,y)$ této hodnoty nabývá.

Řešení. Upravíme $V(x,y)$ do tvaru

$$V(x,y) = (4x^2 - 4xy + y^2) + 2(x^2 + 2x + 1) + 1 = (2x - y)^2 + 2(x+1)^2 + 1.$$

Z (1.1) ihned plyne, že $V(x,y) \geq 1$ pro každá $x, y \in \mathbb{R}$. Naopak z nasycenosti (1.1) vyplývá, že $V(x,y) = 1$ právě tehdy, když $2x = y$ a $x = -1$. To nastává právě tehdy, když $x = -1$ a $y = -2$. $\square$

Literatura

[HLP] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities.* Reprint of the 1952 edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. xii+324 pp. ISBN: 0-521-35880-9.

[KN] W. J. Kaczor, M. T. Nowak: *Problems in mathematical analysis. I. Real numbers, sequences and series.*. Translated and revised from the 1996 Polish original by the authors. Student Mathematical Library, 4. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xiv+380 pp. ISBN: 0-8218-2050-8 26-01.

[R] M. Rokyta: *Bernoulliova nerovnost pro $x < -1$*, Rozhledy Mat.-Fyz. **2–3/00** (2000), 49–56, též Informace MVS, **55** (2000), 15–22.

[RS] M. Rolínek, P. Šalom: *Zdolávání nerovností*, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem, 2012.

[S] J. Šimša: *Dolní odhady rozdílu průměrů*, Rozhledy Mat.-Fyz. **65/10** (1986/87), 403–407.

O POČTU DVOJMÍSTNÝCH DĚLITELŮ

Tomáš Bárta

Tento text obsahuje několik úloh o počtu dvoj- či trojmístných dělitelů přirozeného čísla, tj. úloh podobných úloze 69-B-I-2 matematické olympiády:

Přirozené číslo n má aspoň 73 dvojmístných dělitelů. Dokažte, že jedním z nich je číslo 60. Uveďte rovněž příklad čísla n, které má právě 73 dvojmístných dělitelů, včetně náležitého zdůvodnění.

Všechny prezentované úlohy (a také úloha 69-B-I-2) jsou řešitelné elementárními úvahami, tj. nepotřebují téměř žádnou teorii. Cílem tohoto textu je ukázat, jak k úlohám tohoto typu přistupovat a jaké dílčí otázky by si měl řešitel klást. První část obsahuje sadu řešených úloh, po jejichž postupném vyřešení (či nastudování) by měl student dokázat vyřešit úlohu 69-B-I-2. Druhá část textu obsahuje další úlohy na podobné téma. Při řešení náročnějších úloh se vyplatí znát trochu teorie, proto na závěr uvádíme odkazy na dva texty, které se zabývají děliteli, dělitelností a vlastnostmi prvočísel a které jsou volně přístupné na internetu.

1 Návodné úlohy

Zkusme se nejprve zamyslet nad následující úlohou.

Úloha 1.1. *Přirozené číslo n není dělitelné sedmi. Ukažte, že má nejvýše 85 dělitelů menších než 100.*

Řešení. Pokud číslo není dělitelné sedmi, nemůže být dělitelné ani čtrnácti, jedenadvaceti, ani žádným jiným násobkem sedmi. Kolik je násobků sedmi menších než 100? Přesně 14, protože největší násobek sedmi menší než 100 je $98 = 14 \cdot 7$. Počet přirozených čísel menších než 100 je 99, vyloučíme-li 14 násobků sedmi, kterými číslo n nemůže být dělitelné, zbývá 85 čísel, které mohou být děliteli čísla n. □

Poznámka 1.2. *Uvědomme si, že jsme dokázali následující implikaci, která má velice blízko k úloze 69-B-I-2: Pokud má přirozené číslo n aspoň 86 dělitelů menších než 100, pak sedmička je jedním z nich.*

Položme si nyní otázku, zda číslo 85 v zadání Příkladu 1.1 je nejlepší možné. Tedy: existuje přirozené číslo n, které není dělitelné sedmi a má právě 85 dělitelů menších než 100? Anebo lze tvrzení návodné úlohy dokázat, i když číslo 85 nahradíme nějakým menším číslem?

Úloha 1.3. *Najděte přirozené číslo n, které není dělitelné sedmi a má právě 85 dělitelů menších než 100.*

Řešení. Řešení předcházející úlohy nám říká, že těch 85 dělitelů čísla n musí být právě všechna čísla menší než 100, která nejsou násobky sedmi. Zkusme všechna tato čísla mezi sebou vynásobit, položme

$$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 13 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 96 \cdot 97 \cdot 99. \tag{1.1}$$

Nyní si stačí uvědomit, že toto číslo n není dělitelné žádným dalším číslem menším než 100 než těmi osmdesáti pěti. Všechna další čísla jsou totiž násobky sedmi a nemohou tedy dělit n, protože n definované součinem (1.1) není dělitelné sedmi. □

Uvědomme si, že poslední argument využívá faktu, že sedmička je prvočíslo. Zkusme nyní nahradit v předchozích úlohách sedmičku například desítkou. Zjistíme, že číslo, které není dělitelné deseti má nejvýše $99-9 = 90$ dělitelů menších než 100 (vyřadíme všechny násobky deseti menší než 100, těch je 9). To ale není optimální odhad. Chceme-li totiž stejnou metodou jako výše zkonstruovat číslo n_{10} s 90 děliteli menšími než 100, které není dělitelné deseti, vyřadíme všechny násobky 10 menší než 100 a položíme

$$n_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 19 \cdot 21 \cdot \dots \cdot 99,$$

vidíme, že toto číslo je dělitelné dvěma a pěti, a tedy i deseti. Číslo nedělitelné deseti má tedy nutně méně než 90 dvojmístných dělitelů (možná výrazně méně). Jak ale získat nějaký lepší odhad? Odpověď lze nalézt v řešení následujícího příkladu.

Úloha 1.4. *Součin několika navzájem různých přirozených čísel menších než 20 není dělitelný deseti. Kolik nejvýše může být těchto čísel?*

Řešení. Součin není dělitelný deseti, právě když neobsahuje zároveň činitel dělitelný dvěma a činitel dělitelný pěti. Buď tedy můžeme vyřadit všechna čísla dělitelná dvěma, pak dostaneme součin nejvýše deseti čísel $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 19$, nebo do součinu můžeme některé číslo dělitelné dvěma zahrnout, pak ale musíme vyloučit všechna čísla dělitelná pěti, tj. 5, 10 a 15. V tom případě dostaneme součin nejvýše šestnácti čísel. Tím jsme dokázali, že čísel nemůže být více než 16 a zároveň součin všech čísel s vyloučením 5, 10 a 15 vyhovuje, tj. 16 čísel je hledaná odpověď. □

1.1 Konstrukce čísel s předepsaným počtem dělitelů

V následujících příkladech zkusíme konstruovat čísla s předepsaným počtem dvojmístných dělitelů.

Úloha 1.5. *Najděte číslo n, které má právě 3 dvojmístné dělitele.*

Řešení. Nejjednodušší bude vzít součin tří velkých dvojmístných prvočísel, např. $n = 53 \cdot 71 \cdot 89$. Je zřejmé, že tato tři prvočísla dělí n a ostatní dělitelé n jsou buď součinem aspoň dvou prvočísel, pak jsou více než dvojmístní, nebo je to jednička, tj. jednomístné číslo. □

Úloha 1.6. *Najděte číslo n, které má právě 84 dvojmístných dělitelů.*

Řešení. Číslo n má být dělitelné skoro všemi dvojmístnými čísly (až na 6). Vezměme tedy za n součin všech dvojmístných čísel, z něhož odstraníme 6 největších prvočísel 97, 89, 83, 79, 73 a 71. Je zřejmé, že číslo n bude dělitelné všemi dvojmístnými čísly s vyjímkou právě těchto šesti prvočísel. □

Úloha 1.7. *Najděte číslo n, které má právě 79 dvojmístných dělitelů.*

Řešení. Postupujme jako v předchozím případě, definujme n jako součin všech dvojmístných čísel, z něhož odstraníme 11 největších prvočísel 97, 89, 83, 79, 73, 71, 67, 61, 59, 53 a 47. Mezi dvojmístnými děliteli čísla n bude chybět těchto jedenáct prvočísel, ale navíc ještě číslo $94 = 2 \cdot 47$. Takové číslo tedy bude mít 78 dvojmístných dělitelů. Nápravu zjednáme tak, že do součinu vrátíme jedno z prvočísel, které jsme odstranili (nikoli 47), např. 97. □

Vidíme, že je snadné najít číslo s předepsaným počtem dvojmístných dělitelů, pokud je tento počet velmi malý nebo naopak téměř roven počtu všech dvojmístných čísel. Pokud je tento počet někde mezi, řešení se začíná komplikovat, jak ukazuje Příklad 1.7. Ukážeme si ještě jeden způsob, jak lze postupovat.

Úloha 1.8. *Najděte číslo n, které má právě 30 dělitelů menších než 50.*

Řešení. Definujme n jako součin všech čísel menších než 50, která nejsou dělitelná třemi. Vyloučili jsme 16 násobků trojky, číslo n má tedy $49 - 16 = 33$ dělitelů menších než 50. Pokud ze součinu navíc odstraníme tři největší prvočísla 47, 43 a 41, získáme číslo, které bude mít právě 30 dělitelů menších než 50. □

Myšlenka vyloučit násobky nějakého čísla pochází z Příkladů 1.1 a 1.3. Můžeme vyloučit libovolné číslo? Proč jsme zvolili právě trojku? Dokážete najít číslo, které má právě 300 dělitelů menších než 500?

2 Další úlohy

Úloha 2.1. *Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž má $n!$ více dvojmístných dělitelů než $(n-1)!$.*

Řešení. Ptáme se, jestli po vynásobení čísla $(n-1)!$ číslem n přibude číslu nějaký dvojmístný dělitel. Pokud n je prvočíslo, je odpověď celkem snadná: Pokud n je dvojmístné prvočíslo, pak přibude dělitel n. Pokud je n více než dvojmístné, pak žádný dělitel nepřibude. Jednomístná prvočísla vyšetříme každé zvlášť: pro $n = 2$ a $n = 3$ evidentně nepřibude ($n! < 10$), pro $n = 5$ přibude například dělitel $5 \cdot 4$ a pro $n = 7$ dělitel $2 \cdot 7$.

Je-li n číslo složené, může se počet dvojmístných dělitelů zvětšit z důvodu, že některé prvočíslo se v rozkladu $n!$ vyskytuje ve vyšší mocnině než v rozkladu čísla $(n-1)!$, a tedy může existovat nový dělitel, který má ve svém rozkladu tuto vyšší mocninu prvočísla. Protože n není prvočíslo, tato vyšší mocnina prvočísla musí být aspoň druhá mocnina a má tedy smysl zkoumat prvočísla p menší než 10, aby p^2 bylo nejvýše dvojmístné. Pro $p = 7$ nás zajímá číslo $n = 14$, které zvyšuje mocninu $p = 7$ v rozkladu čísla $n!$ z první na druhou (13! není dělitelné 7^2, ale 14! ano). Pro $p = 5$ je to číslo $n = 10$. Pro $p = 3$ číslo $n = 6$ zvyšuje mocninu z 1 na 2 (a přináší nového dělitele 18) a číslo $n = 9$ zvyšuje mocninu z 2 na 4 ($3^4 = 81 < 100$), vyšší mocniny trojky už jsou větší než 100, a tedy nás nezajímají. Pro $p = 2$ zvyšuje $n = 4$ mocninu dvojky na 3 (a přináší nového dělitele 24), $n = 6$ na 4 (nový dělitel 16), $n = 8$ na 7 (nový dělitel 32).

Zkoumanou vlastnost tedy mají čísla 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14 a všechna dvojmístná prvočísla. □

Úloha 2.2. *Existuje přirozené číslo, které má právě 4 jednomístné dělitele, právě 50 dvojmístných dělitelů a právě 600 trojmístných dělitelů?*

Řešení. Takové číslo neexistuje. Předpokládejme pro spor, že máme číslo n s uvedenou vlastností. Kdyby n nebylo dělitelné třemi, pak nebude dělitelné ani žádným násobkem trojky, což vylučuje 300 z celkových 900 možných trojmístných dělitelů. Číslo n by pak muselo být dělitelné všemi trojmístnými čísly, která nejsou dělitelná třemi, speciálně i čísly 128 a $5 \cdot 128$. Pak ale je n dělitelné čísly 1, 2, 4, 5, 8, což je spor. Číslo n tedy musí být dělitelné třemi.

Ještě jednodušší je ukázat, že n musí být dělitelné dvěma: kdyby nebylo, museli bychom rovnou vyloučit 450 sudých trojmístných čísel, která by nemohla být děliteli. Takže n musí být dělitelné dvěma i třemi, a tedy i šesti, což spolu s jedničkou už jsou čtyři jednomístní dělitelé. Číslo n pak není dělitelné ani čtyřmi ani pěti. Není tedy dělitelné žádným trojmístným číslem, které je dělitelné čtyřmi nebo pěti a takových čísel je

$$\frac{900}{4} + \frac{900}{5} - \frac{900}{20} = 360$$

(čísla dělitelná dvaceti jsme počítali dvakrát, museli jsme tedy jejich počet odečíst). Tedy číslo n má nejvýše $900 - 360 = 540$ trojmístných dělitelů, což je spor. $\square$

Úloha 2.3. *Najděte číslo, které má právě 20 trojmístných dělitelů, jež jsou rovny součinu dvou různých prvočísel?*

Řešení. Pro snazší vyjadřování nazvěme číslo, které je rovno součinu dvou prvočísel, **dobré**. Předpokládejme, že n je dělitelné k různými prvočísly. Pak n má právě $\frac{1}{2}k(k-1)$ dobrých dělitelů. Někteří z těchto dělitelů ale nemusí být trojmístní. Dostáváme podmínku $k \geq 7$. Pro $k = 7$ máme 21 dobrých dělitelů. Zkusme tedy najít 7 prvočísel, aby součin libovolných dvou z nich kromě jedné dvojice byl trojmístný. Většina z těchto prvočísel tedy musí být mezi $\lfloor\sqrt{100}\rfloor = 10$ a $\lfloor\sqrt{999}\rfloor = 31$. Snadno zjistíme, že šestici 11, 13, 17, 19, 23, 29 můžeme doplnit číslem 37 ($29 \cdot 37$ je jediný čtyřmístný součin), případně šestici 13, 17, 19, 23, 29, 31 číslem 7 ($7 \cdot 13$ je jediný dvojmístný součin). Zadání tedy vyhovují např. čísla $11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37$ a $7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$. $\square$

Literatura

[1] F. Veselý: *O dělitelnosti čísel celých.* Mladá fronta, Praha, 1966. https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403560

[2] J. Svoboda a Š. Šimsa: *Seriál — Teorie čísel I, II, III.* 33. ročník matematického korespondenčního semináře, http://mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf

KRUŽNICE, TROJÚHELNÍKY A ÚHLY

Šárka Gergelitsová

Úlohy z geometrie, jakkoli krásné, bývají pro mnohé řešitele obtížné. Přestože pro jejich úspěšné vyřešení většinou stačí vhodně použít jen několik dobře známých pouček, obvykle vyžadují delší hledání vhodných vztahů a souvislostí v zadané konstrukci. Při řešení úloh domácí části Matematické olympiády nemusíme závodit s časem a můžeme potřebné vztahy zevrubněji prozkoumat. Úloha 69-B-I-3 matematické olympiády zní:

Nechť AC je průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že na polopřímkách opačných k polopřímkám AD a DC existují po řadě body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ takové, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokažte tvrzení:
a) Body A', B, C' a D leží na téže kružnici k.
b) Je-li O střed kružnice k a O_A, O_C jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'B$, $CC'B$, pak platí $OO_A \perp OO_C$.

Při řešení úlohy patrně využijeme vlastnosti tětivového čtyřúhelníku (větu o středovém a obvodovém úhlu) a budeme hledat pravé úhly. Připomeňme si tedy potřebné definice a věty.

1 Středové a obvodové úhly (a úhel úsekový)

Definice 1.1. *Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a jehož ramena procházení krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá **středový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB, který v tomto úhlu leží.*

Definice 1.2. *Každý úhel AVB, jehož vrcholem V je bod kružnice k a jehož ramena procházení krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá **obvodový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB, který v tomto úhlu leží.*

Věta 1.3. *Všechny obvodové úhly příslušné k danému oblouku AB jsou shodné a jejich velikost je rovna polovině velikosti středového úhlu příslušnému k témuž oblouku.*

Odtud speciálně:

Věta 1.4. *Všechny obvodové úhly příslušné k půlkružnici AB jsou pravé.*

Věta 1.5. *Všechny obvodové úhly příslušné ke shodným obloukům jsou shodné.*

Věta 1.6. *Všechny tětivy vyťaté na kružnici k shodnými obvodovými úhly jsou shodné.*

Připomeňme si ještě **úsekový úhel**:

Definice 1.7. *Nechť AB je tětiva kružnice k. Úhel, jehož jedním ramenem je polopřímka AB a druhé rameno leží na tečně kružnice k v bodě A, se nazývá **úsekový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB, který v tomto úhlu leží.*

Věta 1.8. *Úsekový úhel příslušný k danému oblouku AB je shodný s obvodovými úhly příslušnými k témuž oblouku.*

Tětivový čtyřúhelník

Definice 1.9. *Konvexní čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici, se nazývá **tětivový**.*

Věta 1.10. *Součet velikostí protilehlých vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku je* $180°$.

Rovnoramenný lichoběžník

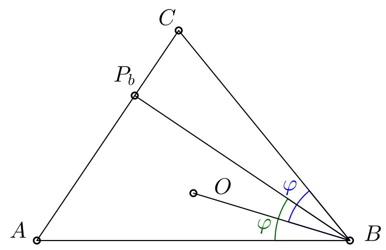
Připomeňme si ještě jedno známé tvrzení (jeho důkaz ponecháváme čtenáři).

Tvrzení 1.11. Lichoběžník je tětivový právě tehdy, je-li rovnoramenný.

2 Úlohy

Vyřešme několik více či méně známých úloh – jak úloh jednoduchých, jejichž řešení z uvedených pravidel plynou přímo, tak úloh obtížnějších, kde budeme hledat další vztahy. Další náměty najdeme ve sbírkách, velmi podnětná je například sbírka [Pra], v minulých ročnících olympiád [MO], či v časopisech, např. [MFI24], [MFI25].

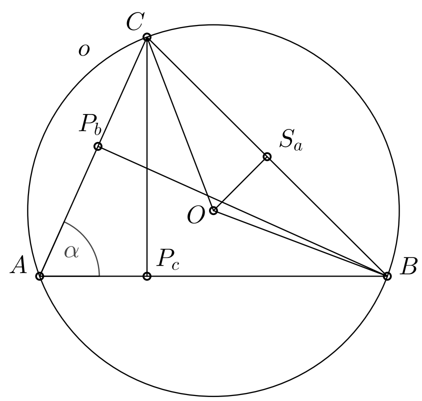
Úloha 2.1. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC označíme P_b patu výšky na stranu b a O po střed opsané kružnice.*
Dokažte, že úhly ABP_b, OBC jsou shodné.



Obr. 1a: Podobné trojúhelníky

Některé úlohy stačí trochu dorýsovat a řešení vidíme okamžitě. Vyřešme tedy trochu jinou úlohu (trojúhelník ACP_c není pro řešení původní úlohy třeba).

Jiná formulace: V ostroúhlém trojúhelníku ABC označíme P_b, P_c, S_a, O po řadě paty výšek na strany b, c, střed strany a a střed opsané kružnice.
Dokažte, že trojúhelníky ACP_c, ABP_b, BOS_a, COS_a jsou podobné.



Obr. 1b: Podobné trojúhelníky

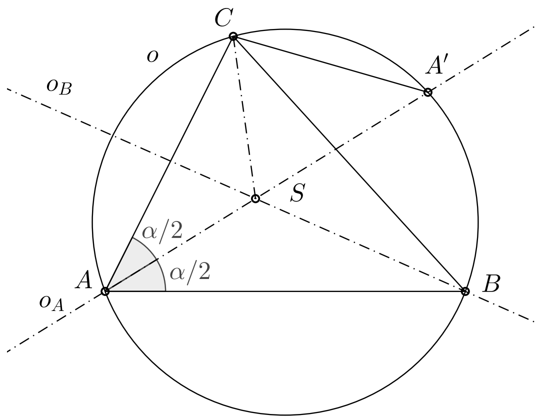
Řešení. Trojúhelníky ACP_c, ABP_b jsou pravoúhlé se společným vnitřním úhlem α a shodné trojúhelníky BOS_a, COS_a jsou pravoúhlé s vnitřním úhlem, který je polovinou středového úhlu odpovídajícího témuž oblouku BC opsané kružnice jako obvodový úhel α. Obsahují tedy také vnitřní úhel o velikosti α. □

Úloha 2.2. *Osa vnitřního úhlu α při vrcholu A trojúhelníku ABC protíná kružnici o trojúhelníku opsanou v bodě A'. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku.*
Dokažte, že trojúhelník $CA'S$ je rovnoramenný.

Řešení. Velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku $CA'S$ určíme nejprve přímo.

Protože je bod S střed kružnice vepsané, jsou přímky BS a CS osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC (viz obr. 2a). Proto $|\sphericalangle SCB| = \gamma/2$. Body B, A, C, A' leží na jedné kružnici a body A, C leží na stejném oblouku nad tětivou BA', proto je $|\sphericalangle BCA'| = |\sphericalangle BAA'| = \alpha/2$. Proto $|\sphericalangle SCA'| = (\alpha + \gamma)/2$.

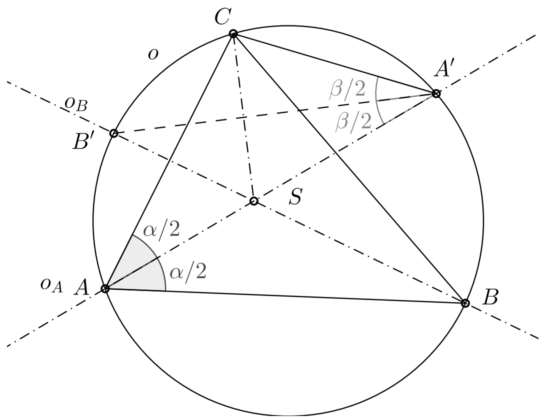
Úhel CSA' je vedlejší k úhlu CSA, jehož velikost je $180° - (\alpha+\gamma)/2$, proto $|\sphericalangle CSA'| = (\alpha + \gamma)/2$. Trojúhelník $CA'S$ je rovnoramenný. □



Obr. 2a: Úhly mezi osami

Tvrzení dokážeme ještě jinak: připomeneme si, že bod A' je středem oblouku BC opsané kružnice (protože $|\sphericalangle CAA'| = |\sphericalangle A'AB|$). Podobně průsečík B' osy vnitřního úhlu při vrcholu B a opsané kružnice je středem oblouku AC (viz obr. 2b). Tudíž jednak $|\sphericalangle CA'B'| = |\sphericalangle B'A'A| = |\sphericalangle B'A'S|$, jednak $|\sphericalangle CB'A'| = |\sphericalangle A'B'B| = |\sphericalangle A'B'S|$. Trojúhelníky $A'CB'$, $A'SB'$ jsou proto shodné podle věty u, s, u, trojúhelník $CA'S$ je proto rovnoramenný. Navíc čtyřúhelník $SB'CA'$ je deltoid, přímka $B'A'$ je osou úsečky CS. □

Poznámka 2.3. *Připomeňme, že bod A', střed oblouku BC, je také bodem osy strany BC.*

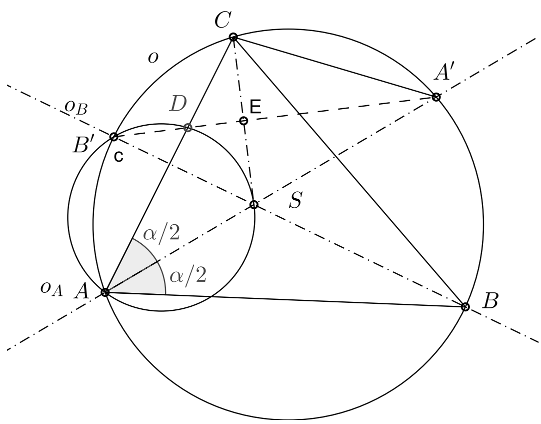


Obr. 2b: Úhly mezi osami

Dokážeme ještě jedno tvrzení: Je-li bod D průsečík strany AC s osou úsečky CS, leží body A, B', D, S na kružnici (obr. 2c).

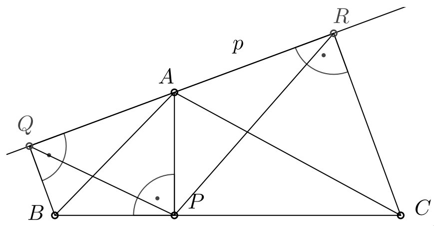
Řešení: Stačí dokázat, že úhly $B'DA$ a $B'SA$ jsou shodné. To snadno vidíme z toho, že trojúhelník DEC na obr. 2c je pravoúhlý, a tudíž $|\sphericalangle B'DA| = |\sphericalangle EDC| = 90° - \gamma/2 = (\alpha + \beta)/2$.

Úhel $B'SA$ je vedlejší k úhlu ASB, jehož velikost je $180° - (\alpha + \beta)/2$, proto $|\sphericalangle B'SA| = (\alpha + \beta)/2$. □



Obr. 2c: Body na kružnici

Úloha 2.4. *Vrcholem A ostroúhlého trojúhelníku ABC vedeme vnitřkem vnějšího úhlu trojúhelníku ABC přímku p. Sestrojíme paty kolmic Q, R vedených k přímce p po řadě vrcholy B, C trojúhelníku. Označme P patu výšky z vrcholu A na stranu BC.*
Dokažte, že trojúhelníky ABC, PQR jsou podobné.



Obr. 3a: Podobné trojúhelníky

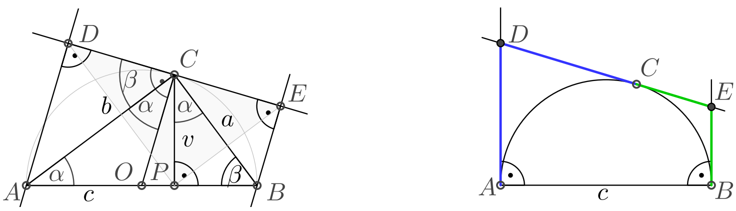
Řešení. Úhly BQA, APB jsou pravé, proto body $APBQ$ leží na kružnici (Thalétově) nad průměrem AB. Pro $Q = A$ je $|\sphericalangle PQR| = 90° - |\sphericalangle BAP| = \beta$. Jinak leží-li body B, Q v téže polorovině s hraniční přímkou AP, což nastává v našem zadání, jsou úhly PQA, PQR totožné a úhly PBA, PQA shodné. Leží-li body B, Q v opačných polorovinách s hraniční přímkou AP, jsou úhly PQA, PQR vedlejší a součet velikostí úhlů PQA, PBA je 180°. Úhly PQR, PBA jsou proto shodné pro $p \not\perp BC$.
Podobně dokážeme shodnost úhlů PRA, PCA. □

Různé lichoběžníky se objevují i v úlohách MO. Mezi návodnými úlohami (k úloze 69-B-I-5) najdeme odkaz na úlohy z 58. ročníku MO kategorie C, v nichž zkoumáme (různé) pravoúhlé lichoběžníky.

- 58-C-I-2: Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC.

- 58-C-II-4: Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S.

Lichoběžník v úloze 58-C-I-2 je zvláštním případem lichoběžníku $BQRC$ v předchozí úloze 3. Úplné řešení úloh je na webu MO, zde uvádíme jen obrázky.
Na obr. 3b (58-C-I-2) jsme vyznačili úhly, na obr. 3c (58-C-II-4) shodné úsečky.

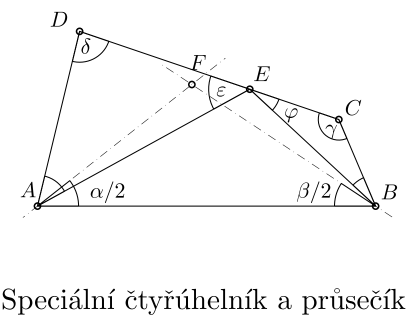


Obr. 3b, c: Pravoúhlé lichoběžníky

Úloha 2.5. *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|CD| = |BC| + |AD|$. Dokažte, že je-li E bod strany CD, pro který platí $|CB| = |CE|$ a $|AD| = |ED|$ a F průsečík os vnitřních úhlů čtyřúhelníku při vrcholech A, B, leží body A, B, E, F na téže kružnici.*

Řešení. Zadání úlohy nepředpokládá, že by byl čtyřúhelník $ABCD$ lichoběžník, jde o obecný čtyřúhelník s danou vlastností. Pokud je $E = F$, platí tvrzení triviálně.

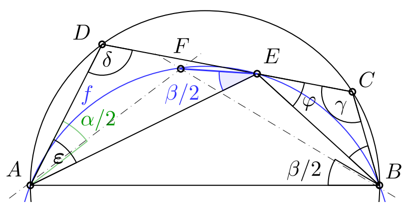
Trojúhelníky AED, EBC jsou rovnoramenné, proto označíme-li velikosti úhlů jako na obrázku 4, tj. $\varphi = |\sphericalangle BEC|$, $\varepsilon = |\sphericalangle DEA|$, platí: $\varphi = 90° - \gamma/2$, $\varepsilon = 90° - \delta/2$. $|\sphericalangle AEB| = 180° - (\varphi + \varepsilon) = \gamma/2 + \delta/2$. V konvexním čtyřúhelníku je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Proto $|\sphericalangle AFB| = 180° - (\alpha/2 + \beta/2) = \gamma/2 + \delta/2$. A protože body E, F leží v téže polorovině s hraniční přímkou AB, leží na tomtéž oblouku nad tětivou AB. □



Obr. 4: Speciální čtyřúhelník a průsečík os úhlů

Úloha 2.6. *V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|CD| = |BC| + |AD|$. Dokažte, že je-li F průsečík os vnitřních úhlů čtyřúhelníku při vrcholech A, B, leží bod F na straně CD.*

Řešení. Do zadání předcházející úlohy přibyla podmínka existence opsané kružnice danému čtyřúhelníku, proto bude mít bod F navíc další vlastnost.

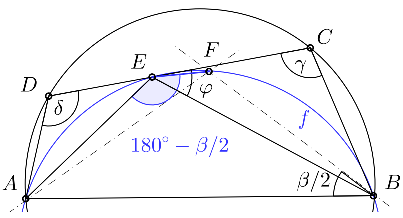


Obr. 5a: Náčrtek, kde pro bod F neplatí tvrzení úlohy

Při řešení podobných úloh dělají řešitelé často tu chybu, že si zadání načrtnou tak, že splňuje dokazovanou vlastnost (splňuje ji, takže je těžké zakreslit opak), pak ale při důkazu vyjdou ze situace zobrazené v náčrtku, a často pak využijí nejen dané vztahy, ale i nějakou vlastnost vyplývající z dokazovaného tvrzení. Takové řešení je pak zcela špatně. Proto jsme si v našem obrázku (obr. 4, 5a) znázornili situaci, kde bod F na straně CD neleží.

Pro $E = F$ tvrzení platí. V minulé úloze jsme dokázali, že body A, F, E, B leží na kružnici. Označme ji f. Z provedeného důkazu dále víme, že $|\sphericalangle AEB| = \gamma/2 + \delta/2$ a že $|\sphericalangle DEB| = 180° - \varphi = 90° + \gamma/2$.

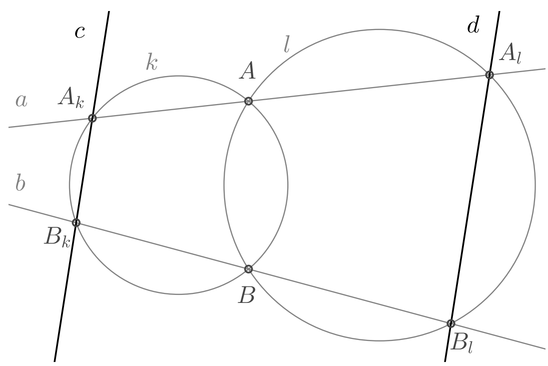
Pokud je $\varepsilon > \alpha/2$, tj. pokud $180° - \delta = \beta > \alpha$ ($ABCD$ je tětivový), leží body na oblouku kružnice f v uvedeném pořadí (viz obr. 5a). V tom případě: $|\sphericalangle FEB| = 180° - |\sphericalangle FAB| = 180° - \alpha/2$.
Znovu využijeme toho, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový (viz obr. 5a): Protože $\alpha + \gamma = 180°$, je $\varphi = 90° - \gamma/2 = \alpha/2$.
Tudíž: $|\sphericalangle FEB| = 180° - \alpha/2$, $|\sphericalangle DEB| = 180° - \varphi = 180° - \alpha/2$. Proto bod F leží na úsečce CD.



Obr. 5b: Druhá poloha zadání

Pokud je $180° - \delta = \beta < \alpha$, leží body na oblouku kružnice f v pořadí A, E, F, B (viz obr. 5b). Potom můžeme vést analogickou úvahu pro velikosti úhlů $|\sphericalangle CEA|$ a $|\sphericalangle FEA|$. $\square$

Úloha 2.7. *Kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Body A, B vedeme přímky a, b, které protnou dané kružnice v dalších bodech: přímka a protne kružnici k v bodě A_k a kružnici l v bodě A_l, přímka b protne kružnici k v bodě B_k a kružnici l v bodě B_l.*
Dokažte, že přímky $c = A_kB_k$, $d = A_lB_l$ jsou rovnoběžné.



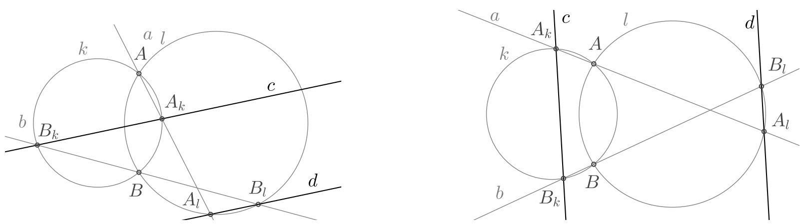
Obr. 6a: Úhly ve dvou kružnicích

Řešení tak, jak ho naznačuje sestrojené zadání na obr. 6a, vypadá snadné:
Protože konvexní čtyřúhelník AA_kB_kB je tětivový, je součet velikostí protilehlých vnitřních úhlů BB_kA_k a A_kAB roven $180°$.
Protože je konvexní čtyřúhelník AA_lB_lB tětivový, je součet velikostí protilehlých vnitřních úhlů BAA_l a A_lB_lB roven $180°$.

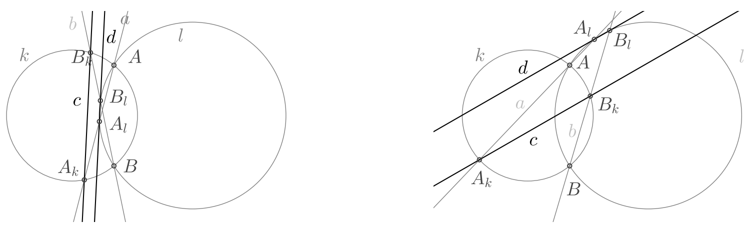
Úhly A_kAB a BAA_l jsou vedlejší, proto jsou úhly BB_kA_k a BAA_l shodné. Součet úhlů BB_kA_k a A_lB_lB je tudíž $180°$, a proto jsou přímky A_kB_k, A_lB_l rovnoběžné.

Takové řešení však není úplné, neboť nebere v úvahu všechny možné vzájemné polohy daných a sestrojených bodů. Navíc, je třeba doplnit, že úloha není formulována zcela korektně, protože v případech $A_k = B_k$ či $A_l = B_l$ nedostáváme dvojici přímek.

Úplná diskuse vzájemné polohy daných a sestrojených bodů na kružnicích (a tedy různých tětivových čtyřúhelníků) bude mnohem členitější než diskuse u předešlé úlohy (viz obr. 6b–e).



Obr. 6b, c: Úhly ve dvou kružnicích



Obr. 6d, e: Úhly ve dvou kružnicích

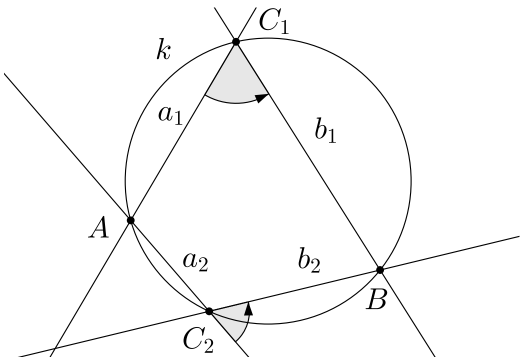
Protože máme dokázat rovnoběžnost **přímek**, zkusme tedy místo různých konvexních čtyřúhelníků zkoumat úhly přímek určených body na kružnicích. Připomeňme si definici **odchylky přímek**.

Definice 2.8. *Odchylkou dvou různoběžných přímek nazýváme velikost ostrého nebo pravého úhlu, který přímky svírají. Odchylka dvou rovnoběžných přímek je nula.*

Označme φ odchylku přímek $a = A_kA$, $p = AB$. Body B_k, A_k, A, B leží na kružnici k, body B_l, A_l, A, B leží na kružnici l. Z vlastností obvodových úhlů nad tětivou BA_k plyne, že odchylka přímek $c = A_kB_k$,

$b = B_l B_k$ a odchylka přímek a, p jsou shodné, rovné φ. Z vlastností obvodových úhlů nad tětivou BA_l plyne, že odchylka přímek $d = A_l B_l$, b a odchylka přímek a, p jsou shodné, rovné φ.

Tedy přímky c, d mají s přímkou b stejnou odchylku. Z toho ale ještě neplyne, že jsou rovnoběžné, mohly by také tvořit strany rovnoramenného trojúhelníku se základnou na přímce b. Vezmeme na pomoc orientované úhly, v nichž záleží na pořadí ramen. Orientovaný úhel dvou přímek a, b bude úhel, o který je třeba otočit přímku a v kladném směru, aby byla rovnoběžná s přímkou b. Velikostí (konvexního) orientovaného úhlu různoběžek a, b může být buď odchylka těchto přímek, nebo její doplněk do 180°. Orientovaný úhel různoběžek a, b a orientovaný úhel různoběžek b, a jsou úhly vedlejší. Orientovaný úhel rovnoběžek je nula.



Obr. 6f Orientované úhly

Zopakujeme-li předchozí úvahu o obvodových úhlech nad tětivami BA_k a BA_l, zjistíme, že platí beze změny i pro velikosti orientovaných úhlů zmíněných přímek (viz obr. 6f). Tedy přímky c, d svírají s přímkou b shodné orientované úhly, a proto jsou rovnoběžné. Viz [Pra]. □

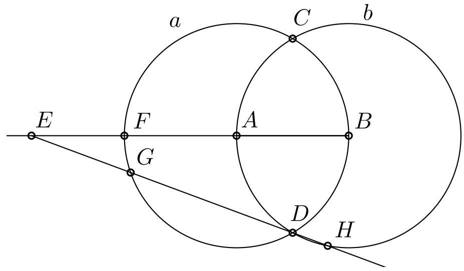
Úloha 2.9 ([MFI25]). *Kružnice a, b se středy po řadě A, B procházejí navzájem jedna středem druhé a protínají se v bodech C, D. Bodem E uvnitř polopřímky opačné k polopřímce AB vedeme přímku ED, která protne kružnice a, b po řadě v dalších bodech G, H. Průsečík úsečky EA s kružnicí a označíme F. Dokažte, že:*

a) Trojúhelník CGH je rovnostranný.

b) Úsečky FG, DH jsou shodné.

c) Body E, G, A, C leží na jedné kružnici.

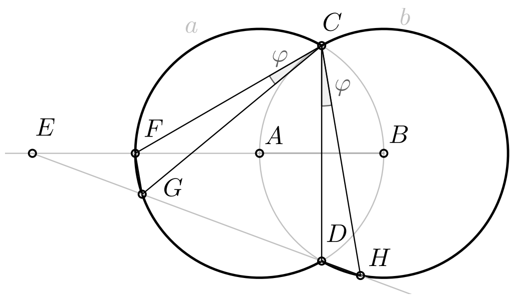
d) Úhly HEB, HCB jsou shodné.



Obr. 7a: Úhly ve dvou kružnicích

Řešení a): Kružnice a, b jsou shodné a jejich společná tětiva CD je strana rovnostranného trojúhelníku CDF, přísluší tedy pro větší oblouky kružnic obvodovým úhlům velikosti 60°. Body G, H leží na větších obloucích shodných kružnic nad společnou tětivou CD. Úhly při vrcholech G, H mají velikost 60°, tudíž je trojúhelník CGH rovnostranný (obr. 7b). □

Řešení b): Trojúhelníky FCD, GCH jsou rovnostranné, proto jsou úhly FCG, DCH shodné. Tyto úhly jsou shodné obvodové úhly ve shodných kružnicích, proto jsou také jim příslušné tětivy FG, DH shodné (obr. 7b). □

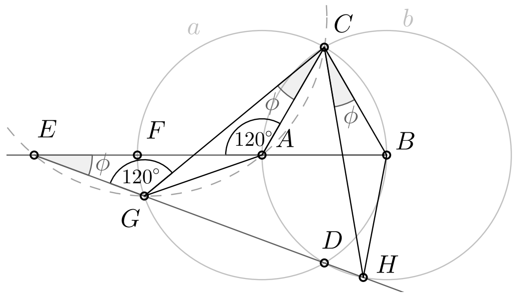


Obr. 7b: Úhly a délky ve dvou kružnicích

Řešení c): Úhel EGC je vedlejší k úhlu HGC, proto je jeho velikost 120°, stejně jako velikost úhlu EAC. Body G, A leží v téže polorovině s hraniční přímkou EC, leží tedy na stejném oblouku kružnice s tětivou EC (obr. 7c). □

Důsledek: Úhly GEB, GCA jsou shodné.

Řešení d): Ukážeme, že trojúhelníky GCA, HCB jsou shodné (obr. 7c). Jsou rovnoramenné s ramenem délky poloměru kružnice a z části *a)* víme, že $|GC| = |CH|$. □



Obr. 7c: Úhly a shodné trojúhelníky

Literatura

[Pra] V. V. Prasolov: *Zadači po geometrii I.*, Moskva, 1986 (rusky).

[MFI24] J. Švrček, V. Zlámal: Čtyři body na kružnici. *Matematika – fyzika – informatika 24 (2015), č. 5, 334–343*, Prometheus, Praha, 2015.

[MFI25] Š. Gergelitsová, T. Holan: O dvou shodných kružnicích. *Matematika – fyzika – informatika 25 (2016), č. 3, 161–173*, Prometheus, Praha, 2016.

[MO] *Matematická olympiáda.* http://www.matematickaolympiada.cz

DĚLITELNOST

Jan Krejčí

Na následujících stránkách budou na řešených příkladech ukázány některé základní techniky používané k řešení příkladů na dělitelnost. Na závěr příspěvku jsou pak uvedeny úlohy pro samostatné procvičení. Zadaří-li se, pak by měl být čtenář vyzbrojený popsanými technikami schopen vyřešit i olympiádní úlohu 69-B-I-4, která se k tomuto příspěvku váže.

Nechť p, q jsou daná nesoudělná přirozená čísla. Dokažte, že pokud má rovnice

$$px^2 - (p+q)x + p = 0$$

celočíselný kořen, potom má celočíselný kořen i rovnice

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0.$$

1 Základní pojmy a vlastnosti

Začneme tím, že si zavedeme (osvěžíme) pojmy, které nám s řešením pomohou a bez důkazu uvedeme základní vlastnosti týkající se dělitelnosti.

Definice 1.1 (Základní pojmy)**.** Řekneme, že přirozené číslo a dělí přirozené číslo b, nebo také a je dělitelem b, pokud existuje přirozené číslo c takové, že $b = ac$ (značíme $a \mid b$). *Největší společný dělitel* čísel a a b je největší takové přirozené číslo, které dělí obě tato čísla. Přirozená čísla a, b jsou *nesoudělná*, pokud jejich největší společný dělitel je 1. Přirozené číslo p je *prvočíslo*, pokud jeho jediní dělitelé jsou 1 a p.

Věta 1.2. *Pro přirozená čísla a, b, c, d a prvočíslo p platí:*

(i) $a \mid a$,

(ii) Pokud $a \mid b$ *a také* $b \mid c$, *pak* $a \mid c$,

(iii) Pokud $a \mid b$ *a také* $a \mid c$, *pak* $a \mid b + c$,

(iv) Pokud $a \mid b$ *a také* $c \mid d$, *pak* $ac \mid bd$,

(v) Pokud $p \mid ab$, *pak buď* $p \mid a$ *a nebo* $p \mid b$.

Důkaz předchozího tvrzení není těžký. Krom posledního bodu si vystačíme s definicí dělitele čísla a v posledním případě k tomu využijeme ještě definici prvočísla.

2 Příklady na dělitelnost

Úloha 2.1. *Pro přirozená čísla a, b, c platí, že $a^2c+c-ab=0$. Dokažte, že $a \mid c$.*

Řešení. Abychom nějakým způsobem mohli využít vlastnosti zmíněné výše, převedeme rovnost do (pro nás) vhodnějšího tvaru. Z předpokladu úlohy plyne, že $a^2c+c=ab$ a tedy také, že $c(a^2+1)=ab$.

Tento tvar je pro nás zajímavější, protože dává do souvislosti čísla a a c. Navíc díky rovnosti platí, že číslo a musí dělit součin $c(a^2+1)$.[10]

Víme, že $a \mid a^2$. Tedy každý dělitel čísla a dělí i číslo a^2, a proto každý dělitel čísel a a a^2+1 musí nutně dělit číslo 1. Ovšem jediné přirozené číslo, které dělí jedničku, je jednička. Tedy největší společný dělitel čísel a a a^2+1 je číslo 1. Pokud je $a=1$, pak automaticky dělí c a pokud není, pak $a \mid c$, protože platí, že $a \mid c(a^2+1)$. □

Je důležité si uvědomit, že obecně neplatí, že z $a \mid bc$ plyne, že $a \mid b$ nebo $a \mid c$. Například $6 \mid 4 \cdot 3$, ale neplatí, že $6 \mid 4$ nebo $6 \mid 3$.

Úloha 2.2 ([MKS], 32-1-4)**.** *Alča napsala v nějakém pořadí na papír čísla 1 až 10 (každé jednou), přičemž začala sedmičkou. Neušlo jí, že pro každé $k=1,\dots,9$ byl součet prvních k čísel dělitelný tím následujícím. Dokažte, že posledním číslem na papíře byla určitě pětka.*

Řešení. Po sedmičce, která je dle zadání první, mohou následovat jen její dělitele 1 nebo 7. Protože se sedmička nesmí v posloupnosti opakovat, musí být druhým číslem 1.

Dále označme poslední číslo x a (za pomoci vzorce pro součet n po sobě jdoucích čísel) vypočtěme součet všech ostatních čísel.

$$1+2+\cdots+10-x=\frac{10\cdot 11}{2}-x=55-x.$$

Číslo $55-x$ musí být dle předpokladu dělitelné číslem x. Víme, že x dělí x, a proto také x dělí $55=1\cdot 5\cdot 11$. Jednička už byla použita a x je číslice, tedy nutně $x=5$. □

[10] Platí to i pro číslo b a naopak čísla c a a^2+1 musí dělit součin ab, ale pro potřeby této úlohy to není důležité.

Úloha 2.3 ([MKS], 36-8-2(a)). *Tonda narazil na n po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součtem je prvočíslo. Určete všechny možné hodnoty n.*

Řešení. Ukážeme, že jediné hodnoty, kterých n může nabývat, jsou jedna a dvě. Víme, že prvočíslo 43 lze triviálně napsat jako součet jednočlenné posloupnosti čísel obsahující číslo 43, navíc jej lze napsat jako součet dvoučlenné posloupnosti 21 + 22. Tedy pro n rovno jedné či dvěma tedy taková posloupnost opravdu existuje.

Pro $n > 2$ uvažme nějakou posloupnost n po sobě jdoucích čísel a nejmenší z nich označme k. Potom můžeme součet těchto čísel napsat ve tvaru:

$$\frac{n \cdot (k + k + n - 1)}{2} = \frac{n}{2}(2k + n - 1) = n \cdot \left(k + \frac{n-1}{2}\right).$$

Je-li n sudé číslo, pak jsou $\frac{n}{2}$ i $2k + n - 1$ větší než jedna. Pro n liché je $n > 1$ z předpokladu a $k + \frac{n-1}{2}$ je přirozené číslo větší než jedna. V obou případech jsme schopni součet uvažovaných n čísel napsat jako součin dvou přirozených čísel, která jsou větší než jedna, takže se nemůže jednat o prvočíslo. □

V předchozích dvou příkladech výše jsme využili elementární vlastnosti (*iii*) z věty 1.2 a faktu, že prvočíslo má pouze dva dělitele. Druhý lze využít i obráceně – vím-li, že součin dvou čísel má být prvočíslo, pak jeden z činitelů musí být nutně jednička. Kromě znalostí z dělitelnosti jsme také využili vzorec pro součet n po sobě jdoucích čísel, který je také užitečný.

Úloha 2.4 ([MKS], 36-2-5). *Číslo n má tu vlastnost, že $2n+1$ i $3n+1$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. Ukažte, že $5n+3$ není prvočíslo.*

Řešení. Označme a, b přirozená čísla, pro která platí $a^2 = 2n + 1$ a $b^2 = 3n + 1$. Pak

$$5n + 3 = 4(2n + 1) - (3n + 1) = 4a^2 - b^2 = (2a - b)(2a + b).$$

Vyjádřili jsme tedy $5n + 3$ jako součin dvou přirozených čísel. Abychom dokázali, že $5n + 3$ není prvočíslo, zbývá ukázat, že čísla $2a - b$ a $2a + b$ nejsou rovna jedné. Číslo $2a + b$ je určitě různé od jedné, protože a i b jsou přirozená.

Předpokládejme pro spor, že $2a - b = 1$. Pak

$$5n + 3 = (2a - b)(2a + b) = 1(b + 1 + b) = 2b + 1,$$

tedy $5n + 2 = 2b$. Odtud a z definice b dostáváme

$$(5n + 2)^2 = 4b^2 = 12n + 4.$$

Po úpravě dostaneme $n\,(25n + 8) = 0$. Poslední uvedená rovnost je ve sporu s tím, že n je celé číslo větší než nula. Proto ani $2a - b$ není rovno jedné, tudíž $5n + 3$ není prvočíslo. $\square$

Jak je z tohoto příkladu patrné, velmi důležitou technikou pro řešení příkladu je umět si zadané výrazy zapsat tím „správným" způsobem (vzhledem k tomu, co máme zadáno). V příkladu výše je to $5n + 3 = 4(2n + 1) - (3n + 1)$.

Úloha 2.5 ([MKS], 36-2-6)**.** *David má n hrušek a Martin s Tondou mu je střídavě ujídají. Martin začíná a ten, kdo je na řadě, si vybere nějaké prvočíslo p a sní $p - 1$ hrušek. Oba loupežníci se snaží sníst poslední hrušku. Dokažte, že pro nekonečně mnoho n toho může dosáhnout Tonda, ať se mu v tom Martin snaží sebevíc zabránit.*

Řešení. Hra je určitě konečná (hráči zřejmě hrušky někdy dojí, vždy musí sníst alespoň jednu). Definujme pozici, ve které se hra nachází, jako počet zbývajících hrušek. Můžeme si tedy jednotlivé pozice rozdělit do dvou skupin. Pozice n je vyhrávající, jestliže hráč, který je na tahu na pozici n, má vyhrávající strategii (tedy umí určitě vyhrát nezávisle na tazích protihráče). Naopak n označíme jako prohrávající, pokud hráč nacházející se na tahu nemá při správné hře druhého hráče šanci na vítězství. Platí, že můžeme-li z pozice n přípustným tahem přejít na nějakou prohrávající pozici, pak je pozice výherní. Naopak, pokud z nějakého n neexistuje žádný přípustný tah do prohrávající pozice, je toto n pozice prohrávající. Pozici 0 definujeme jako triviální prohrávající pozici – hráč, před kterým je nula hrušek, je ten, který právě sledoval, jak je ten druhý dojedl – tedy prohrávající.

Chceme dokázat, že existuje nekonečně mnoho prohrávajících pozic (to jsou přesně ty, ve kterých vyhraje Tonda, protože Martin začíná). Není těžké si všimnout, že pozice 3 je prohrávající, stejně jako např. 8 a 11. Předpokládejme, že prohrávajících pozic je jen konečně mnoho. Potom zřejmě nějaká nejvyšší z nich, označme si ji třeba x. Všechny vyšší pozice než x jsou z tohoto předpokladu vyhrávající.

Nyní zkoumejme pozici $(x+2)! + (x+1)$. Je to zřejmě větší hodnota než x, měla by tedy být vyhrávající, tj. měl by z ní existovat tah do jedné z prohrávajících pozic. Prohrávající pozice jsou některá čísla z čísel 0, 1, 2, …, x. Rozdíl $(x + 2)! + (x + 1)$ a některého z těchto čísel tedy nutně musí být roven $p - 1$ pro nějaké prvočíslo p. Pro nějaké i od 0 do x tedy máme

$$(x + 2)! + (x + 1) - i = p - 1.$$

To se dá upravit na

$$(x + 2)! + (x + 2) - i = p.$$

Pro každé i z určeného intervalu se bude rozdíl $(x + 2) - i$ nacházet v rozmezí od 2 do $(x+2)$ a tímto číslem bude dělitelné i $(x+2)!$, které je větší než $(x+2)$. Po vytknutí tedy na levé straně dostaneme součin dvou čísel větších než jedna, což se nikdy nemůže rovnat prvočíslu. Dostali jsme spor, a prohrávajících pozic tedy nemůže být konečně mnoho. Existuje tedy nekonečně mnoho pozic, pro které Tonda vyhraje nezávisle na Martinových tazích! $\square$

Poslední příklad je ilustrací toho, že někdy je dělitelnost schovaná i tam, kde by ji člověk nečekal.

3 Návodné úlohy

Pro úplnost uveďme i (oficiální) návodné úlohy, které by měly vést přímo k vyřešení olympiádní úlohy.

Úloha 3.1. *Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b platí, že $a \mid b$ a $b \mid a$, pak $a = b$.*

Úloha 3.2. *Nechť a je přirozené číslo. V závislosti na čísle a určete největšího společného dělitele čísel a, $a^2 + 4$.*

Úloha 3.3. *Nechť p je přirozené číslo. Najděte kořeny rovnice*

$$px^2 + (p^2 - p + 1)x + p - 1 = 0.$$

Pro vyřešení prvního příkladu je dobré si uvědomit, že z $a \mid b$ plyne, že $|a| \leq |b|$. Ve druhém příkladu, že každý společný dělitel čísel a a a^2+4 musí dělit číslo 4 (viz vlastnost (iii) věty 1.2). Poslední příklad pak lze vyřešit faktorizací levé strany nebo použitím vzorce pro výpočet kořenů kvadratického polynomu.

4 Příklady na procvičení

Autorská řešení příkladů lze najít na stránkách matematického korespondenčního semináře[11] v sekci Matematika/Minulé ročníky.

Úloha 4.1 ([MKS], 37-4-2)**.** *Mocný rytíř Karolín bojuje se zákeřným sedmatřicetihlavým drakem Šmudlou. Jedním švihem může drakovi useknout 3, 5 nebo 8 hlav. Učiní-li tak, pak v 1. případě drakovi naroste 9 hlav, v 2. případě mu narostou 2 a v posledním mu naroste dokonce 11 hlav. Drak zemře, pokud ztratí všechny své hlavy. Rozhodněte, zda může Karolín porazit Šmudlu.*

Úloha 4.2 ([MKS], 36-8-5 (a))**.** *Na skalní římse leží tři hromádky o 51, 49 a 5 kamenech. V každém kroku můžeme buď sloučit dvě hromádky, nebo rozdělit hromádku se sudým počtem kamenů na dvě stejně velké. Můžeme takto vytvořit 105 hromádek po jednom kameni?*

Úloha 4.3 ([MKS], 37-4-7)**.** *Najděte všechny dvojice přirozených čísel* (n, k) *splňující rovnici*

$$n^k = (n-1)! + 1.$$

Literatura

[MKS] Matematický korespondenční seminář MFF UK (MKS), úlohy z různých ročníků uváděné ve tvaru ročník-série-číslo úlohy `mks.mff.cuni.cz`

[MO] Matematická olympiáda, návodné úlohy k 69. ročníku kat. B `matematickaolympiada.cz/`

[11] *http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php*

PODOBNOST, TEČNY A OBSAHY

Šárka Gergelitsová

Pro dvě kružnice a jejich společné tečny dokážeme najít mnohé vztahy, k jejichž odvození stačí vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku a podobnost (trojúhelníků). Úloha 69-B-I-5 matematické olympiády zní:

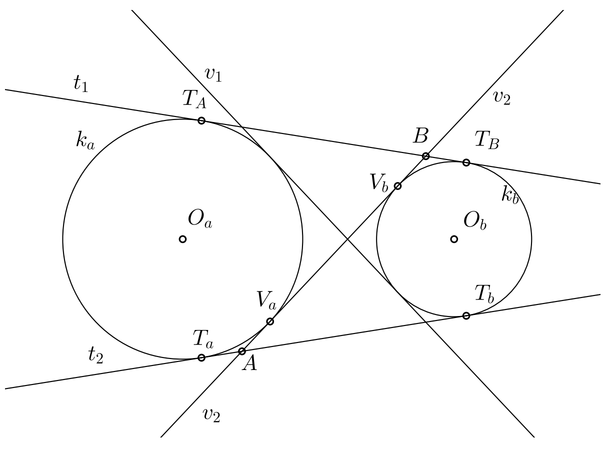
Jsou dány kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, které se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná vnější tečna se dotýká kružnice a v bodě T_a a kružnice b v bodě T_b. Pomocí r_a, r_b vyjádřete poměr poloměrů kružnic k_a, k_b opsaných po řadě trojúhelníkům T_aAT, T_bBT.

1 Tečny kružnic

V návodných úlohách k úlohám domácího kola 69. ročníku MO najdeme pro tuto úlohu následující cvičení (má číslo 3).

Úloha 1.1. *Kružnice k_b leží vně kružnice k_a a je s ní disjunktní. Nechť jejich vnější společné tečny T_aT_b a T_AT_B ($T_a, T_A \in k_a$, $T_b, T_B \in k_b$, $T_a \neq T_A$ a $T_b \neq T_B$) protínají jejich společnou vnitřní tečnu V_aV_b ($V_a \in k_a$, $V_b \in k_b$) po řadě v bodech A a B. Dokažte, že*

$$|T_aT_b| = |T_AT_B| = |AB|.$$



Obr. 1: Společné tečny dvou kružnic

Řešení. Text obsahuje i návod k řešení. Přebíráme ho zde, protože z něj budeme odvozovat další vztahy: První rovnost plyne ze souměrnosti podle přímky procházejí středy obou kružnic. Dále ze souměrnosti (podle přímek O_aA, O_bA, O_aB, O_bB) platí $|T_aA| = |V_aA|$, $|T_bA| = |V_bA|$, $|T_AB| = |V_aB|$, $|T_BB| = |V_bB|$. Sečtením těchto rovnic dostaneme $|T_aA| + |T_bA| + |T_AB| + |T_BB| = |V_aA| + |V_bA| + |V_aB| + |V_bB|$. Na levé straně rovnice je součet (stejných) délek $|T_aT_b|$ a $|T_AT_B|$, na pravé dvojnásobek $|AB|$, odtud tak plyne druhá dokazovaná rovnost. □

Z uvedených rovností plynou dále uvedená tvrzení.

Tvrzení 1.2. $|AT_a| = |BT_B|$.

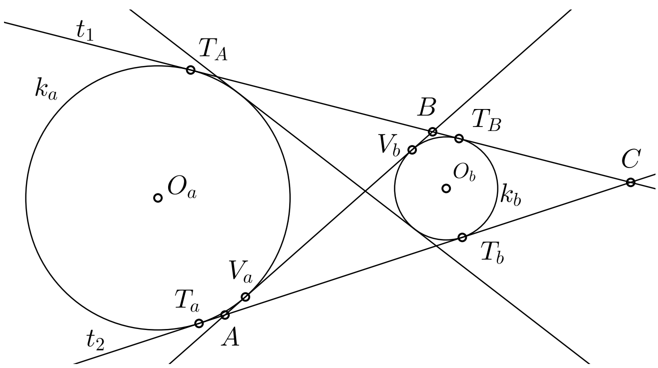
Důkaz. Tvrzení plyne ze vztahů:
$|AV_b| + |V_bB| = |AB| = |T_aT_b| = |T_aA| + |AT_b|$ (tvrzení $|AB| = |T_aT_b|$ jsme dokázali výše), a $|AT_b| = |AV_b|$, $|BT_B| = |V_bB|$. Tudíž také $|AT_a| = |BV_b| = |BT_B|$. □

A protože $|AT_a| = |AV_a|$, tak také

$$|AV_a| = |BV_b|.$$

Porovnejte toto tvrzení s vlastností dvojice kružnic – kružnice vepsané a připsané trojúhelníku:

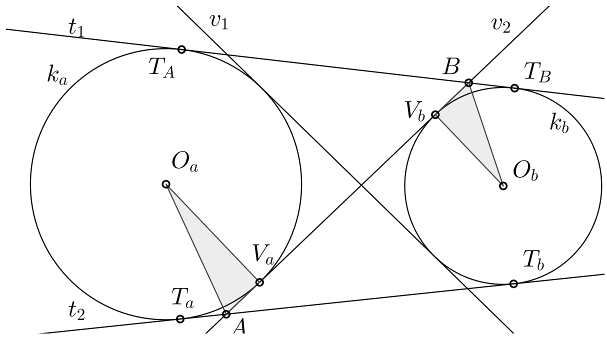
Body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC a kružnice vně připsané dané straně jsou středově souměrné podle středu této strany. (Viz obrázek 2, kde jsme průsečík vnějších tečen kružnic označili C.)



Obr. 2: Body dotyku vepsané a připsané kružnice

Tvrzení 1.3. *Poměr obsahů čtyřúhelníků $T_aAV_aO_a$, $T_BBV_bO_b$ je roven poměru poloměrů kružnic r_a, r_b.*

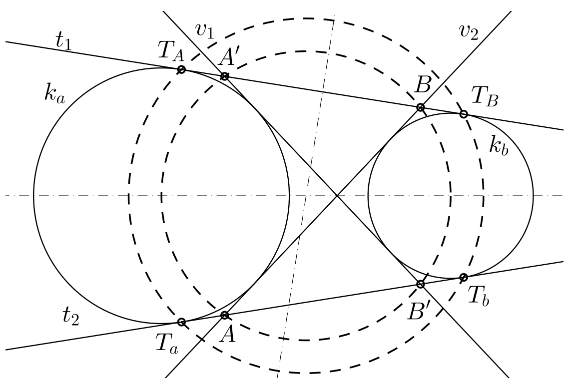
Důkaz. Víme (viz obr. 3):
Obsah trojúhelníku AV_aO_a je roven polovině obsahu čtyřúhelníku $T_aAV_aO_a$. Obsah trojúhelníku BV_bO_b je polovinou obsahu čtyřúhelníku $T_BBV_bO_b$. Pravoúhlé trojúhelníky AV_aO_a, BV_bO_b mají shodné základny a jejich výšky jsou r_a, r_b. □



Obr. 3: Poměr obsahů

Tvrzení 1.4. *Čtveřice bodů dotyku T_A,T_a,T_b,T_B vnějších tečen s kružnicemi, a čtveřice průsečíků vnitřních tečen s vnějšími tečnami A,A',B,B' leží na soustředných kružnicích.*

Důkaz. Ze souměrnosti podle středné kružnic plyne, že čtyřúhelníky $T_AT_aT_bT_B$ a $AA'BB'$ jsou rovnoramenné lichoběžníky, a tudíž jsou tětivové. Středy jejich opsaných kružnic leží na osách jejich stran, a tudíž na (společné) ose přímek T_aT_A a AA', kterou je středná O_aO_b kružnic (viz obr. 4).



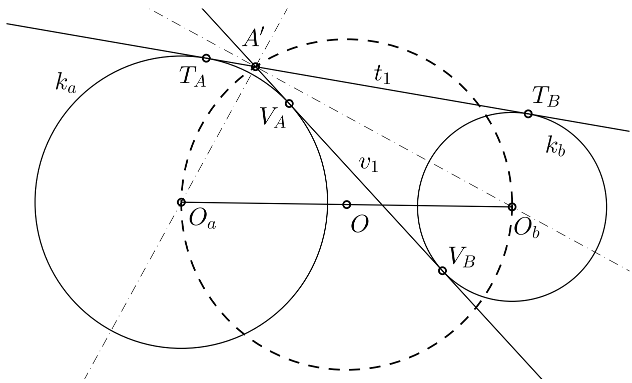
Obr. 4: Soustředné kružnice

Ze shodnosti úseček T_AA', BT_B navíc plyne, že úsečky T_AT_B, $A'B$ mají společnou osu. Proto jsou obě opsané kružnice soustředné. □

Z vlastností tečen a z podobnosti můžeme odvodit některá další tvrzení.

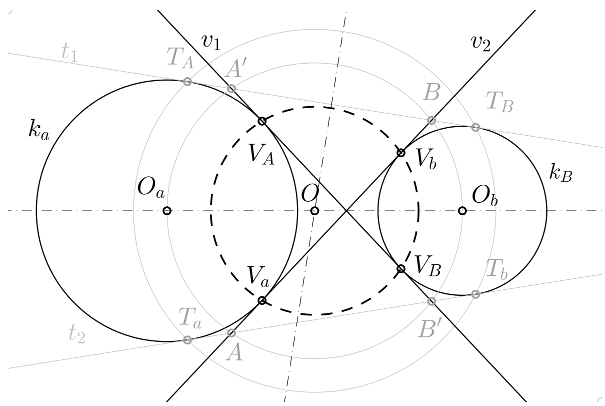
Tvrzení 1.5. *Úsečka O_aO_b je průměrem kružnice opsané čtyřúhelníku $AA'BB'$.*

Důkaz. Víme, že přímka $A'O_a$ je osou úhlu $T_AA'V_A$, přímka $A'O_b$ je osou úhlu $V_BA'T_B$, jsou to tedy osy souměrnosti tečen t_1, v_1, tedy kolmé přímky. Proto leží bod A' na Thalétově kružnici nad průměrem O_aO_b (viz obr. 5).



Obr. 5: Thalétova kružnice

Podobně dokážeme, že bod B (viz obr. 6) leží na Thalétově kružnici nad průměrem O_aO_b. □



Obr. 6: Soustředné kružnice

Tvrzení 1.6. *Čtyřúhelník $V_AV_aV_BV_b$ je tětivový a střed jeho opsané kružnice je střed úsečky O_aO_b.*

Důkaz. Ze souměrnosti podle středné kružnic plyne, že $V_AV_aV_BV_b$ je rovnoramenný lichoběžník, tudíž je tětivový. Střed jemu opsané kružnice leží na osách stran, tj. na společné ose úseček V_AV_a a V_BV_b, což je středná kružnic (viz obr. 6).

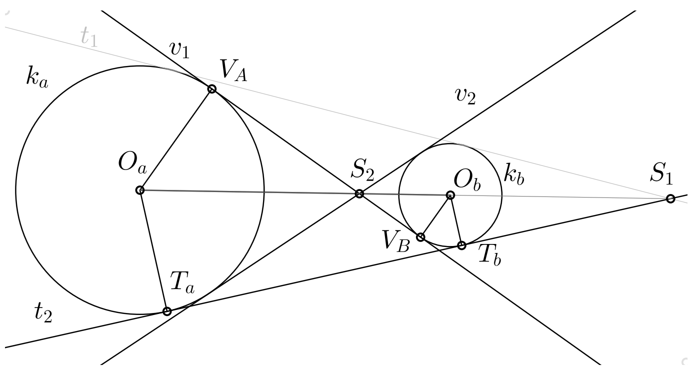
Střed opsané kružnice leží také na ose úsečky V_AV_B (je to tětiva opsané kružnice).

Přímka V_AV_B je tečnou obou kružnic, proto jsou body V_A, V_B kolmými průměty středů O_a, O_b na tuto přímku (viz obr. 7).

Střed úsečky O_aO_b se kolmo promítá do středu jejího průmětu V_AV_B, proto prochází osa úsečky V_AV_B středem úsečky O_aO_b. □

Poznámka 1.7. *Stejně jsme mohli dokázat tvrzení, že střed kružnice opsané lichoběžníku $T_AT_aT_bT_B$ je střed úsečky O_aO_b.*

Všechny tři kružnice opsané lichoběžníkům $T_AT_aT_bT_B$, $V_AV_aV_BV_b$, $AA'BB'$ jsou soustředné.



Obr. 7: Thalétova kružnice

Tvrzení 1.8. *Kružnice k_a, k_b jsou podobné v podobnosti s koeficientem rovným poměru jejich poloměrů.*

Tvrzení 1.9. *Kružnice k_a je obrazem kružnice k_b ve dvou stejnolehlostech, jejichž středy jsou v průsečíku vnějších společných tečen kružnic ($H(S_1; r_a/r_b)$) a v průsečíku vnitřních společných tečen kružnic ($H(S_2; -r_a/r_b)$), viz obr. 7. Proto:*

- $|O_aS_1| : |O_bS_1| = r_a : r_b$ (vidíme to například z podobných trojúhelníků $O_aT_aS_1$, $O_bT_bS_1$).

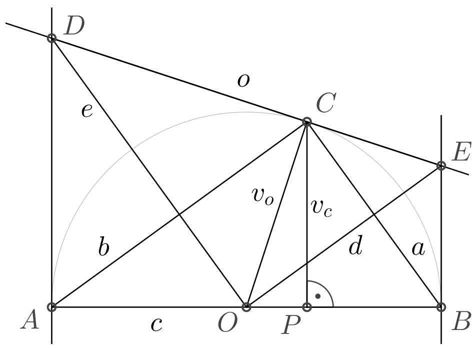
- $|O_aS_2| : |O_bS_2| = r_a : r_b$ (vidíme to například z podobných trojúhelníků $O_aV_AS_2$, $O_bV_BS_2$).
- *Poměry obsahu trojúhelníků $O_aT_aS_1$, $O_bT_bS_1$) jsou $r_a^2 : r_b^2$.*

2 Rovnoběžné tečny a obsahy

Mezi návodnými úlohami k úlohám domácího kola 69. ročníku Matematické olympiády najdeme také odkaz na úlohu krajského kola 58. ročníku MO kategorie C:

Úloha 2.1 (58-C-II-4)**.** *Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S.*

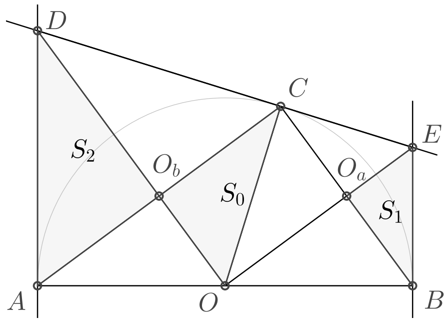
Úlohy MO jsou na webu MO zveřejněny včetně (většinou několika různých) úplných řešení, zde stručně přebíráme jen jedno možné řešení, a poté využijeme zadání úlohy ke hledání dalších vztahů.



Obr. 8a: Podobné pravoúhlé trojúhelníky

Řešení. Jak jsme již v tomto textu ukázali, trojúhelníky ABC, DEO jsou podobné (viz obr. 8a). Proto $|DE| : |AB| = o : c = v_o : v_c$. Máme-li uvedeného poměr vyjádřit pomocí obsahu S trojúhelníku ABC, využijeme vztah $v_c = 2S/c$. Trojúhelníky jsou pravoúhlé. Protože DE je tečna opsané kružnice pravoúhlému trojúhelníku ABC, je v_o poloměr této kružnice, pro který platí $v_o = c/2$. Odtud po dosazení do rovnosti $|DE| : c = v_o : v_c$ dostáváme $|DE| = c \cdot \dfrac{v_o}{v_c} = c \cdot \dfrac{\frac{c}{2}}{\frac{2S}{c}} = \dfrac{c^3}{4S}$. $\square$

V konstrukci podle výše uvedené úlohy budeme hledat podobné trojúhelníky a určovat poměry jejich obsahů. Na obr. 8b jsme středy stran $a = BC$, $b = AC$ označili po řadě O_a, O_b.



Obr. 8b: Podobné pravoúhlé trojúhelníky

Trojúhelníky AOO_b, COO_b, OCO_a, OBO_a jsou zřejmě shodné (ze symetrií). Stejně tak jsou shodné trojúhelníky AO_bD, CO_bD a trojúhelníky CEO_a, BEO_a.

2.1 Podobné trojúhelníky a jejich obsahy

Najděme podobné trojúhelníky a určeme poměry v nich obsažených délek a jejich obsahů.

Cvičení 2.2. *Zdůvodněte následující vztahy:*

- $\triangle ABC \sim \triangle AOO_b \sim \triangle DAO_b \sim \triangle CEO_a \sim \triangle DEO \sim \triangle DOA \sim \triangle OEB$.
- $|DO_b| : |AO_b| = b : a$, $|DO_b| : |AO_b| = |AO_b| : |OO_b|$ *(Eukleidova věta o výšce v trojúhelníku DOA).*
- $S_2 : S_0 = S_0 : S_1 = b^2 : a^2$. *Proto* $S_0 = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.
- $S_{ADC} : S_{AOC} = S_{BOC} : S_{BEC} = b^2 : a^2$. *(Zřejmě* $S_{AOC} = S_{BOC}$.*)*
- $|AD| : |CO| = |CO| : |BE| = b : a$.
- $|AD| : |BE| = b^2 : a^2$.
- $\triangle ADC \sim \triangle BOC, \quad \triangle AOC \sim \triangle BEC$.

ÚLOHY O STŘELCÍCH

Antonín Slavík

Šachové úlohy jsou tradiční součástí rekreační matematiky. Většinou jde o úlohy inspirované šachem, k jejichž řešení však nejsou zapotřebí žádné šachové dovednosti – stačí znát způsob, jakým se pohybují jednotlivé šachové figury. K nejznámějším problémům patří (kromě procházek po šachovnici) úlohy týkající se rozmístění maximálního počtu neohrožujících se figur a dále úlohy zaměřené na rozmístění minimálního počtu figur tak, aby ohrožovaly všechna pole šachovnice. Úloha 69-B-I-6 matematické olympiády zní:

Figurka střelce ohrožuje na šachovnici libovolné pole diagonály, na níž střelec stojí. Pokud ovšem na některém poli diagonály stojí věž, střelec už pole za ní neohrožuje. Určete největší možný počet střelců, které můžeme spolu se čtyřmi věžemi umístit na šachovnici 8×8 *tak, aby se střelci navzájem neohrožovali.*

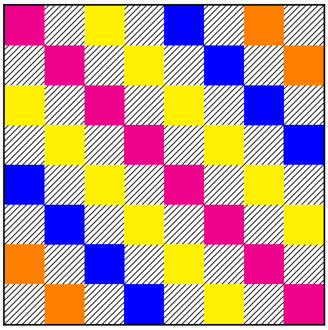
V tomto textu se zaměříme na příbuzné úlohy související s figurou střelce; jde o klasické úlohy převzaté z [Ch1], [Ch2], [JJ], [Wa]. V těchto zdrojích čtenář najde též úlohy věnované dalším figurám. Jak je zmíněno v zadání soutěžní úlohy, střelec se v jednom tahu může posunout o libovolný počet polí, a to v úhlopříčném směru. Barvy figur obvykle nehrají v matematických úlohách žádnou roli, proto budeme v obrázcích všechny střelce znázorňovat černou barvou bez ohledu na to, zda stojí na černém nebo bílém poli.

1 Maximální počet neohrožujících se střelců

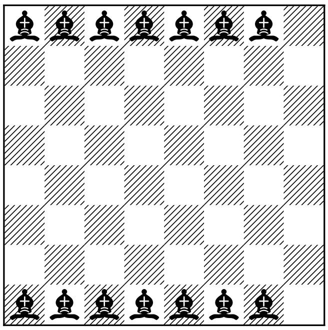
Úloha 1.1. *Dokažte, že maximální počet střelců, které lze rozmístit na šachovnici* 8×8 *tak, aby se navzájem neohrožovali, je* 14.

Řešení. Šachovnici lze rozdělit na 15 navzájem rovnoběžných úhlopříček tak, jak ukazuje obr. 1.

Na každé z úhlopříček může stát nejvýše jeden střelec. Jelikož pole v levém dolním a v pravém horním rohu leží na jedné úhlopříčce, může být střelcem obsazeno nejvýše jedno z nich. Vidíme, že střelců nemůže být více než 14. Obr. 2 ukazuje jeden možný způsob, jak tohoto počtu dosáhnout. □



Obrázek 1: Šachovnice rozdělená na 15 úhlopříček vyznačených střídavě šrafovaně a barevně



Obrázek 2: Rozmístění 14 neohrožujících se střelců

Úloha 1.2. *Dokažte, že pokud je na šachovnici* 8×8 *rozmístěno* 14 *neohrožujících se střelců, pak všichni stojí na okraji šachovnice.*

Řešení. Každému poli šachovnice přiřadíme celé číslo udávající počet střelců, kteří toto pole ohrožují. (Dohodněme se přitom, že každý střelec ohrožuje pole, na kterém stojí.) Každé z těchto čísel je kladné – pokud by některé pole nebylo ohroženo žádným střelcem, mohli bychom na toto pole umístit další figuru, což by bylo ve sporu s předchozí úlohou. Zároveň je zřejmé, že žádné pole není ohroženo více než dvěma střelci.

Polí, na kterých stojí střelec, je 14 a mají číslo 1. Všechna rohová pole mají také číslo 1 a aspoň dvě z nich nejsou obsazena střelcem. Celkem tedy máme aspoň 16 polí s číslem 1 a nejvýše 48 polí s číslem 2. Pro součet S všech čísel na šachovnici tedy platí

$$S \leq 1 \cdot 16 + 2 \cdot 48 = 112. \tag{1.1}$$

Všimněme si, že střelec stojící na libovolném krajním poli šachovnice ohrožuje právě 8 polí. Naopak střelec stojící jinde než na krajním poli ohrožuje aspoň 10 polí. Označíme-li písmenem a počet střelců stojících mimo okraj šachovnice, pak z předchozích pozorování plyne

$$S \geq a \cdot 10 + (14 - a) \cdot 8 = 2a + 112. \tag{1.2}$$

Obě nerovnosti (1.1) a (1.2) mohou platit současně jen tehdy, když $a = 0$, tj. když všech 14 střelců stojí na okraji šachovnice. □

Úloha 1.3. *Dokažte, že počet způsobů, jak na šachovnici* 8×8 *rozmístit* 14 *střelců tak, aby se navzájem neohrožovali, je* 256.

Řešení. Z předchozí úlohy víme, že všech 14 střelců musí stát na okraji šachovnice. Zaměříme se na její horní řádek. Na prvním (resp. posledním) poli tohoto řádku stojí střelec právě tehdy, když poslední (resp. první) pole dolního řádku je volné.

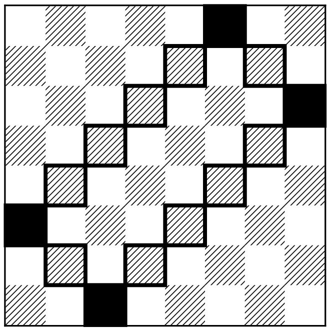
Uvažujme dále některé ze šesti polí horního řádku, které není na okraji; nechť jde o k-té pole zleva. Toto pole je součástí dvou úhlopříček, jejichž zbývající koncová pole leží na levém a pravém okraji šachovnice, viz obr. 3. Tato dvě pole leží na dalších úhlopříčkách, které se protínají v dolním řádku šachovnice, a to na k-tém poli zprava, viz opět obr. 3. Je-li na šachovnici rozmístěn maximální počet neohrožujících se střelců, znamená to, že ze čtyř zmíněných polí jsou obsazena buď pole u horního a dolního okraje, nebo pole u levého a pravého okraje.

Vidíme, že informace o pozicích střelců v horním řádku již jednoznačně určuje rozmístění všech ostatních střelců. Počet možností, jak obsadit či neobsadit pole v horním řádku, je $2^8 = 256$. □

2 Pokrývání šachovnice střelci

Budeme říkat, že daná skupina střelců pokrývá jistou množinu polí na šachovnici, pokud každé uvažované pole buď obsahuje střelce, nebo je některým střelcem ohroženo.

Úloha 2.1. *Dokažte, že nejmenší počet střelců, kterými lze pokrýt šachovnici* 8×8, *je* 8.



Obrázek 3: Přítomnost či nepřítomnost střelce na vyznačeném poli v horním řádku jednoznačně určuje obsazenost vyznačených polí u zbývajících tří okrajů šachovnice

Řešení. Každý střelec stojící na bílém (resp. černém) poli ohrožuje pouze bílá (resp. černá pole). Potřebujeme tedy zjistit, kolika střelci lze pokrýt pole každé ze dvou barev.

Představme si, že celou šachovnici otočíme o 45 stupňů. Střelci se pak z našeho pohledu pohybují vodorovně či svisle. Uprostřed otočené šachovnice se nachází obrazec složený z černých polí tvořený čtyřmi řádky a pěti sloupci, viz obr. 4 vlevo. K pokrytí tohoto obrazce jistě potřebujeme aspoň 4 střelce stojící na černých polích.

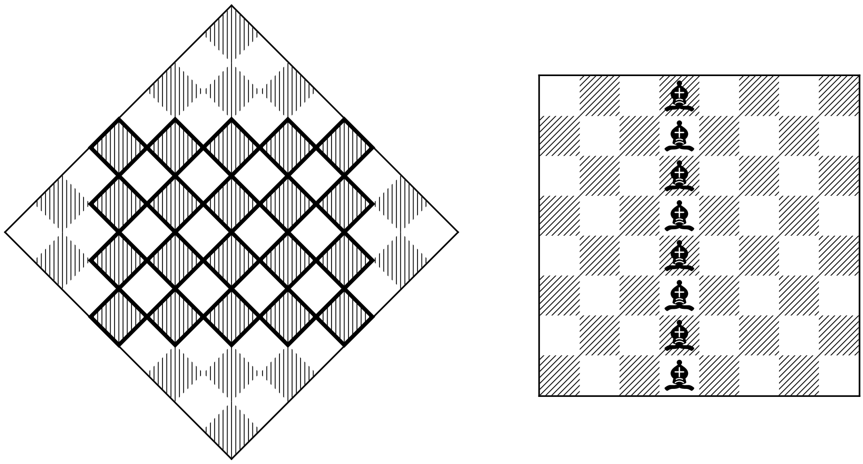
Podobně k pokrytí všech bílých polí potřebujeme další 4 střelce. 8 střelců již stačí k pokrytí celé šachovnice, viz obr. 4 vpravo. □

Úloha 2.2. *Dokažte, že počet způsobů, jak pokrýt šachovnici* 8×8 *pomocí* 8 *střelců, je* 11 664.

Řešení. Ukážeme, že počet způsobů, jak pokrýt černá pole pomocí 4 střelců, je 108. Díky symetrii je stejný i počet způsobů, jak pokrýt bílá pole, a výsledný počet pokrytí celé šachovnice je $108^2 = 11\,664$.

Stejně jako v řešení předchozí úlohy využijeme toho, že po otočení šachovnice o 45 stupňů se střelci pohybují vodorovně či svisle.

Uvažujme pouze černá pole na otočené šachovnici. Prostřední čtyři řádky v tomto obrazci jsou pokryty 4 střelci jen tehdy, když každý z nich obsahuje jednu figuru (v opačném případě existuje řádek a sloupec neobsahující střelce, a tedy jejich společné pole není pokryto žádnou figurou). Podobně platí, že prostřední tři sloupce jsou pokryty 4 střelci jen tehdy, když každý z nich obsahuje aspoň jednu figuru. Pokud naopak každý



Obrázek 4: Otočená šachovnice s vyznačeným obrazcem o rozměrech 4×5 (vlevo); pokrytí šachovnice 8 střelci (vpravo)

ze zmíněných tří sloupců a čtyř řádků obsahuje jednu figuru, pak jsou pokryta všechna černá pole.

Nyní je zřejmé, že při pokrytí černých polí 4 střelci vždy nastane jedna z následujících možností:

- Všechny 4 figury jsou v prostředních třech sloupcích (a zároveň v prostředních čtyřech řádcích). V jistém sloupci tedy stojí 2 figury. Počet rozmístění tohoto druhu je $3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 36$.
- V prostředních třech sloupcích jsou 3 figury a čtvrtá stojí jinde (přičemž všechny 4 figury jsou v prostředních čtyřech řádcích). Počet polí mimo prostřední tři sloupce, na která lze umístit jednoho střelce, je 12. Počet rozmístění všech čtyř figur je tedy $12 \cdot 3! = 72$.

Ukázali jsme, že celkový počet způsobů, jak pokrýt černá pole 4 střelci, je $36 + 72 = 108$. $\square$

3 Závěr

Matematické úlohy o šachových figurách lze řešit nejen na klasické šachovnici o rozměrech 8×8, ale též obecněji na čtvercových šachovnicích

$n \times n$ (či dokonce obdélníkových šachovnicích $m \times n$). Čtenář se může pokusit zobecnit úlohy z tohoto textu a odpovědět na následující otázky:

- Jaký maximální počet střelců lze rozmístit na šachovnici $n \times n$ tak, aby se navzájem neohrožovali? Kolika způsoby toho lze dosáhnout?
- Jakým nejmenším počtem střelců lze pokrýt šachovnici $n \times n$? Kolika způsoby to lze udělat?

Příslušná řešení lze dohledat v [Ch1], [Ch2], [JJ], [Wa].

Literatura

[Ch1] L. Chybová: *Šachové úlohy v kombinatorice*. Diplomová práce, MFF UK, 2017. Dostupné z: `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lucie_chybova_dp/sachove-ulohy.pdf`.

[Ch2] L. Chybová: *Šachové úlohy v kombinatorice*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 63 (2018), 125–147. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/147328`.

[JJ] A. M. Jaglom, I. M. Jaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 1: Combinatorial Analysis and Probability Theory*, Dover Publications, Inc., 1964.

[Wa] J. J. Watkins: *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*, Princeton University Press, 2004.

Kategorie

C

ČÍSLA, ČÍSLICE A CIFERNÉ SOUČTY

Antonín Jančařík

1 Přirozená čísla a jejich zápis

Přirozená čísla vyjadřují počty objektů, můžeme si je představit jako počet čárek na lístku v restauraci. Aby se nám s nimi lépe počítalo, zapisujeme je nikoli pomocí čárek, ale používáme zápis využívající číslice. Ačkoli je přirozených čísel nekonečně mnoho, stačí nám pro jejich popis konečný počet číslic. V některých případech však musím použít více než jednu číslici. Zápis čísel, který běžně používáme, je zápisem v desítkové soustavě (nebo také v soustavě o základu deset). V něm používáme deset číslic. O tom, jaké číslo je zapsané, nerozhodují jenom použité číslice, ale také jejich pořadí. Například pokud číslo 536 je zápisem čísla v desítkové soustavě, tak potom číslo $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$ je rozvojem toho čísla v desítkové soustavě.

V matematické olympiádě se někdy setkáváme s úlohami, ve kterých se nepracuje pouze se samotným číslem, ale také s číslicemi jeho zápisu. Nejjednodušší operací, kterou můžeme provést s jednotlivými číslicemi, ze kterých se číslo skládá, je tyto číslice sečíst, čímž dostáváme takzvaný ciferný součet. Například ciferným součtem čísla 536 je číslo 14 (5+3+6).

Ciferný součet má tu vlastnost, že když v zápisu čísla změníte jednu číslici, tak se změní i ciferný součet čísla. S ciferními součty jste se jistě setkali při vyšetřování dělitelnosti čísly tři a devět. Číslo je dělitelné 3 (resp. 9), právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný 3 (resp. 9).

V praxi se někdy používají ciferné součty s vahami. To znamená, že jednotlivé číslice započítáme do ciferného součtu v závislosti na tom, na jaké pozici se nachází. Nejjednodušším případem je tzv. alternovaný ciferný součet, v něm jednotlivé číslice střídavě přičítáme a odečítáme (např. alternovaný součet $536 = 5 - 3 + 6 = 8$). Alternovaný ciferný součet lze použít na ověření dělitelnosti 11. Číslo je dělitelné 11 právě tehdy, když je 11 dělitelný jeho alternovaný ciferný součet.

Alternovaný ciferný součet má nejen tu vlastnost, že když v čísle zaměníte jednu číslici, tak se změní alternovaný ciferný součet čísla, ale alternovaný ciferný součet se změní i v případě, pokud zaměníte pořadí dvou vedle stojících různých číslic.

Ciferné součty s vahami se využívají jak pro ověření dělitelnosti čísla, tak jako tzv. kontrolní součty. Alternovaný součet je například využíván pro kontrolu rodných čísel, s jinými aplikacemi se můžete setkat při kontrole čárových kódů, letenek, či ISBN a ISSN knih a časopisů.

Nyní se ale podívejme, kolik je různých čísel se stejným ciferným součtem.

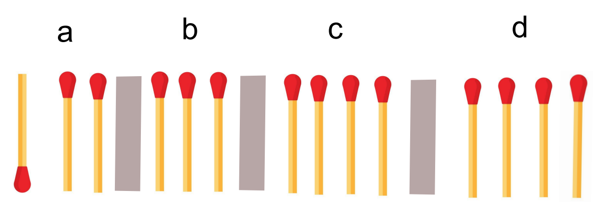
Úloha 1.1. *Mějme čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$, jehož ciferný součet je 14. Kolik takových čísel existuje?*

Řešení. Je zřejmé, že součet číslic $a+b+c+d$ musí být roven čtrnácti a první číslice a musí být nenulová. Úloha je tak ekvivalentní úloze, kolika způsoby lze rozdělit 14 sirek na hromádky označené $a-d$ tak, aby první hromádka nebyla prázdná. Protože chceme, aby počet sirek na jedné hromádce představoval číslici v zápisu čísla, musíme dodat ještě doplňující podmínku, že počet sirek na žádné hromádce není větší než 9.

Úlohu nejprve vyřešíme bez této poslední podmínky a následně odečteme počet rozdělení, ve kterých je na jedné hromádce více než devět sirek.

Protože první hromádka a nesmí být prázdná, musíme na tuto hromádku položit alespoň jednu sirku. Pokud tak učiníme, zbývá nám rozdělit 13 sirek na 4 označené hromádky. Počet rozdělení je tak ekvivalentní počtu možností, kterými lze rozdělit 13 sirek na hromádky označené $a-d$.

Nyní si představte, že berete sirky postupně a dáváte je nejprve na hromádku a, potom na hromádku b, c a následně všechny zbylé sirky dáte na poslední hromádku d. Počet způsobů, kterými toto můžete učinit je zjevně stejný, jako způsob rozdělení sirek na hromádky.



Obr. 1: Reprezentace čísla 3 344

A nyní již stačí přejít k zápisu uvedeného postupu. Všech třináct sirek si seřadíme do řady a v místě, kde jsme přestali dávat sirky do jedné hromádky a začali dávat do následující, vložíme zarážku. Celkem tak máme v řadě 16 předmětů – 13 sirek a 3 zarážky. Každému rozdělení sirek na hromádky odpovídá jednoznačně umístění zarážek do řady. Počet jednotlivých rozdělení je tak stejný, jak počet umístění zarážek do řady, což je $\binom{16}{3} = 560$ možností.

A nyní se vraťme k podmínce, že na žádné hromádce nemůže být více než devět sirek. Je zjevné, že více než 9 sirek nemůže být současně na více než dvou hromádkách. Situaci si rozdělíme na 2 případy, na situaci, kdy je více než 9 sirek na hromádce a a na situaci, kdy je více než 9 sirek na některé z hromádek $b - d$.

Pokud víme, že na hromádce a je více než 9 sirek, počet možností spočteme tak, že na hromádku umístíme 10 sirek a zbylé 4 sirky rozmístíme na 4 hromádky, což můžeme učinit $\binom{7}{3} = 35$ způsoby.

Pokud je více než 9 sirek na některé z hromádek $b-d$, zvolíme si jednu z těchto hromádek a umístíme na ní 10 sirek. Dále umístíme 1 sirku na hromádku a, protože ta nesmí být prázdná a zbylé 3 sirky rozmístíme $\binom{6}{3} = 20$ způsoby na zbylé 4 hromádky.

Celkem jsme tak nalezli $35 + 3 \cdot 20 = 95$ započtených možností, které nesplňují podmínku, že na žádné hromádce není více než 9 sirek.

Nyní již můžeme odpovědět na otázku ze zadání. Celkem existuje $560 - 95 = 465$ čtyřciferných čísel, jejichž ciferný součet je rovný 12. □

Úloha 1.2. *Mějme čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$, jehož ciferný součet je 14. Kolik takových čísel existuje, pokud víme, že součet prvních dvou číslic se rovná součtu druhých dvou číslic?*

Řešení. Pokud je součet všech číslic 14 a součet prvních dvou je stejný jako dalších dvou, tak součet prvních dvou číslic musí být 7 a součet druhých dvou číslic musí být také 7. Je zjevné, že součet 7 dávají jen následující dvojice čísel: $(7, 0), (6, 1), (5, 2)$ a $(4, 3)$.

U druhé dvojice mohou být v uvedeném, nebo opačném pořadí. Existuje tedy 8 možností, jak mohou být obsazeny číslice $\overline{cd}$.

U první dvojice první číslice nesmí být nula. Existuje tedy jen 7 možností, jak mohou být obsazeny číslice $\overline{ab}$.

Celkem tak existuje 56 čísel, které splňují uvedenou podmínku. □

Úloha 1.3. *Mějme čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$, jehož ciferný součet je 14. Kolik takových čísel existuje, pokud víme, že součet prvních 2 číslic je o jedna větší než součet druhých dvou číslic?*

Řešení. Pokud je součet prvních dvou číslic o jedna větší než součet druhých dvou číslic, tak součet všech číslic je liché číslo a nemůže být roven čtrnácti. Úloha tak nemá řešení. □

Úloha 1.4. *Mějme čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ dělitelné 12, tvořené čtyřmi navzájem různými číslicemi a, b, c, d, o kterém víme, že $|\overline{ab} - \overline{cd}| = 1$. Najděte všechna taková čísla.*

Řešení. Uvažujme nejprve případ, kdy $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

Případ $b = d + 1$ nemůže nastat, protože pak $a = c$ a číslo není tvořeno čtyřmi navzájem různými číslicemi.

Případ $b = 0$ a $d = 9$ nemůže nastat, protože pak číslo $\overline{abcd}$ není dělitelné 2 a tudíž ani 12.

Zbývá prověřit případ, kdy $\overline{cd} - \overline{ab} = 1$. Opět, případ $d = b + 1$ nemůže nastat, protože pak $a = b$ a číslo není tvořeno čtyřmi různými číslicemi. Zbývá nám případ, kdy $d = 0$, $b = 9$ a $c = a + 1$.

Protože číslo musí být dělitelné 4, mohou nastat následující možnosti: 1920, 3940, 5960, 7980.

Pouze ve dvou případech je hledané číslo dělitelné 12, a to u čísel 1920 a 7980. □

Úloha 1.5. *Mějme čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ jehož číslice jsou nenulové, o kterém víme, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ a jeho ciferný součet i součin je dělitelný sedmi. Dokažte, že potom toto číslo je dělitelné třemi.*

Řešení. Pokud je číslo tvořeno nenulovými číslicemi a, b, c, d a jejich součin je dělitelný 7, tak alespoň jedna z nich musí být rovna sedmi. Dále rozdělíme naše řešení do čtyřech pod skupin, podle toho, která z číslic je rovna 7.

a = 7

Pokud je $a = 7$, tak mohou nastat dvě možnosti: $c = 7$ a $b = d + 1$. Současně víme, že součet všech číslic musí být také dělitelný 7, tedy i 7 dělí $2d + 1$, a proto $d = 3$. Hledaným číslem je 7473, které je dělitelné 3.

$c = 6$, $b = 0$, $d = 9$. Toto číslo však nesplňuje podmínky zadání, zaprvé není tvořeno nenulovými číslicemi a zadruhé jeho ciferný součet není dělitelný 7.

b = 7

V tomto případě $d = 6$ a $a = c$. Protože ciferný součet musí být dělitelný 7, přichází v úvahu jediné řešení $a = 4 = c$. Hledané číslo 4746. A číslo 4746 je dělitelné 3.

c = 7

V tomto případě máme opět dvě možnosti, první pro $a = 7$ již máme vyřešenu. Zbývá tak dořešit případ 8079. Zde opět můžeme konstatovat, že toto řešení nesplňuje podmínky zadání. Číslo není tvořeno nenulovými číslicemi a není dělitelné třemi.

d = 7

V tomto případě $b = 8$ a $a = c$. Z podmínky dělitelnosti ciferného součtu čísla 7 dostáváme jediné řešení, a to číslo 3 837. Toto číslo je dělitelné 3. □

2 Závěr

Podmínky zadání splňují tři čísla: 7 473, 4 746 a 3 837. Všechna tato čísla jsou dělitelná třemi, čímž je požadované tvrzení dokázané.

ROVNOBĚŽNÍKY A KOSOČTVERCE

Jakub Löwit

Rovinná geometrie je velmi pěknou částí matematiky, která se pro svou hravost a pestrost často objevuje mezi úlohami všech úrovní matematických olympiád. K řešení geometrických úloh samozřejmě existuje mnoho různých přístupů – například bychom se mohli pokusit obecně vyjádřit všechny délky úseček či velikosti úhlů v daném obrázku. To je ale téměř vždy dost zdlouhavé, náročné, a navíc velmi náchylné k chybám. Proto se typicky vyplatí hledat co nejjednodušší a nejelegantnější řešení, ze kterého je navíc lépe vidět, proč úloha platí.

V domácím kole kategorie C letošního 69. ročníku matematické olympiády se objevují hned dvě geometrické úlohy. V tuto chvíli se budeme zabývat především tou první z nich (69-C-I-2):

Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, jehož všechny strany jsou shodné a protější strany rovnoběžné. Bod P je takový, že čtyřúhelník $CDEP$ je rovnoběžník. Dokažte, že bod P je středem kružnice opsané trojúhelníku ACE a současně i průsečíkem výšek trojúhelníku BDF.

Ačkoli si přímo neukážeme řešení této úlohy, předvedeme si některé vlastnosti rovnoběžníků a kosočtverců, které při řešení mohou pomoci. Zároveň si vyzkoušíme použití těchto znalostí při řešení jiných úloh z minulých ročníků matematické olympiády.

Přestože to na první pohled vypadá, že na rovnoběžnících není nic zajímavého, nenechme se zmást – použití jejich vlastností k nalezení jednoduchých řešení různých úloh může být překvapivé a hezké.

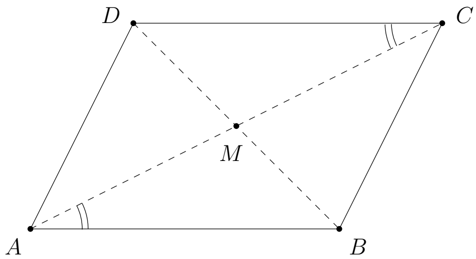
1 Vlastnosti rovnoběžníků

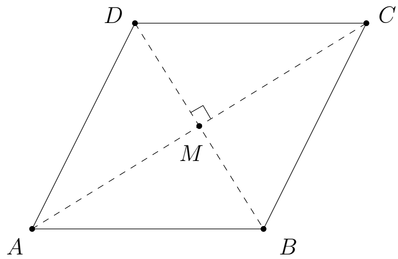
Dříve než se pustíme do řešení úloh si zopakujme některá základní fakta.

Definice 1.1. *Čtyřúhelník $ABCD$ se nazývá rovnoběžník, pokud jsou obě dvojice jeho protilehlých stran rovnoběžné. Rovnoběžník, jehož strany jsou všechny stejně dlouhé, se nazývá kosočtverec.*

Rovnoběžníky samozřejmě mají mnoho dalších vlastností, které se budou hodit. Ze střídavých úhlů u úhlopříček a věty *usu* o shodnosti trojúhelníků použité na některou z nich například dostáváme $|AB| = |CD|$ a $|BC| = |AD|$. Označíme-li dále průsečík úhlopříček AC a BD

jako M, dostáváme opět užitím *usu* rovnosti $|AM| = |CM|$ a $|BM| = |DM|$. Úhlopříčky v rovnoběžníku se tedy navzájem půlí.





Pokud se navíc jedná o kosočtverec, dělí jej každá úhlopříčka na dva rovnoramenné trojúhelníky. Výšky těchto trojúhelníků pak splývají s úhlopříčkami původního kosočtverce. Jinými slovy tedy zjišťujeme, že úhlopříčky v kosočtverci jsou navzájem kolmé.

Pokud naopak chceme o nějakém čtyřúhelníku $ABCD$ ukázat, že se jedná rovnoběžník či kosočtverec, mnohdy stačí ověřit pouze několik z těchto vlastností. V následujících bodech proto shrneme tyto šikovné „ekvivalentní definice“. Že tomu tak skutečně je si lze rozmyslet podobným způsobem jako výše.

Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník právě tehdy, když:

- $AB \parallel DC$ a zároveň $BC \parallel AD$
- $AB \parallel DC$ a zároveň $|AB| = |DC|$
- jeho úhlopříčky AC a BD se navzájem půlí

Čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtverec právě tehdy, když:

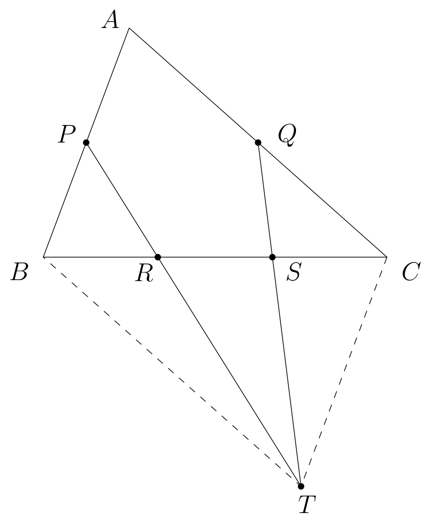
- $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$ a $|AB| = |AD|$
- jeho úhlopříčky AC a BD se navzájem půlí a jsou na sebe kolmé

2 Několik úloh

Nyní si konečně ukážeme několik pěkných úloh. Přitom doporučujeme čtenáři, aby se nad nimi před přečtením řešení zkusil na chvíli zamyslet sám. První úloha pochází z předminulého ročníku matematické olympiády.

Úloha 2.1 (67-C-II-3). *Je dán trojúhelník ABC. Nechť P, Q jsou po řadě středy stran AB, AC a nechť R, S jsou vnitřní body úsečky BC, pro něž $|BR| = |RS| = |SC|$. Označme T průsečík přímek PR a QS. Dokažte, že $ABTC$ je rovnoběžník.*

Řešení. Dokážeme, že $AB \parallel CT$ a zároveň $|AB| = |CT|$, což stačí.



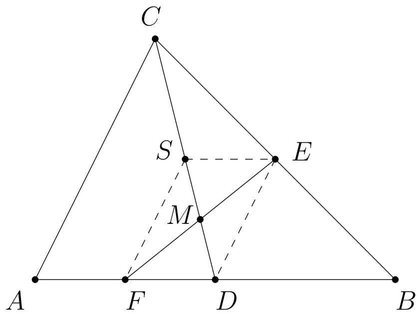
Protože PQ je střední příčka, platí $|PQ| = \frac{1}{2}|BC|$. Zároveň ze zadání máme $|RS| = \frac{1}{3}|BC|$. Z podobnosti trojúhelníků PTQ a RTS proto $\frac{|PT|}{|RT|} = \frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{3}{2}$, odkud dostáváme $2|RP| = |RT|$. Ze zadání přitom víme $2|BR| = |RC|$. Využitím vrcholového úhlu u R tak zjišťujeme, že trojúhelníky RBP a RCT jsou si podobné, a to v poměru $\frac{1}{2}$. Máme proto rovnost úhlů $|\sphericalangle BPR| = |\sphericalangle CTR|$, ze střídavých úhlů pak $CT \parallel AB$. Z poměru podobnosti zároveň platí $|CT| = 2|PB| = |AB|$, čímž jsme hotovi. $\square$

V předchozí úloze se rovnoběžník objevoval už v zadání. Pro využití vlastností rovnoběžníků ale samozřejmě není nutné, aby se o nich mluvilo od začátku – někdy se zkrátka při řešení úlohy objeví samy od sebe. Je tedy dobré vnímat, zda nějaká čtveřice zadaných bodů ve skutečnosti rovnoběžník netvoří.

Tento přístup se však dá dotáhnout ještě o kousek dál: při řešení úlohy si můžeme záměrně nějaký rovnoběžník přikreslit tak, aby nám pomohl. Často se například vyplatí dokreslit čtvrtý vrchol vhodného rovnoběžníku, který na obrázku předtím nebyl. Tento trik si ukážeme hned na dvou úlohách. Ta následující opět pochází z matematické olympiády, tentokrát z minulého ročníku.

Úloha 2.2 (68-C-I-3). *Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF.*

Řešení. Průsečík přímek CD a EF označme M. Chceme dokázat, že bod M je středem EF. Nabízí se hledat nějaký šikovný rovnoběžník s úhlopříčkou EF, jehož druhá úhlopříčka určuje přímku CD. Zkusme proto do obrázku doplnit střed úsečky CD, který označíme S.



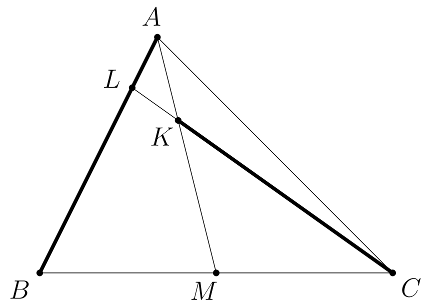
Tvrdíme, že čtyřúhelník $FDES$ je rovnoběžník. Protože je SE střední příčka v trojúhelníku DBC, je $SE \parallel FD$. Podobně je DE střední příčka v trojúhelníku ABC a FS střední příčka v trojúhelníku ADC, tedy $DE \parallel AC \parallel FS$. Tím jsme ověřili, že dvojice protějších stran čtyřúhelníka $FDES$ jsou rovnoběžné, takže se skutečně jedná o rovnoběžník.

Bod M je nyní průsečíkem úhlopříček v $FDES$, speciálně je proto středem úhlopříčky EF. Tím jsme hotovi. □

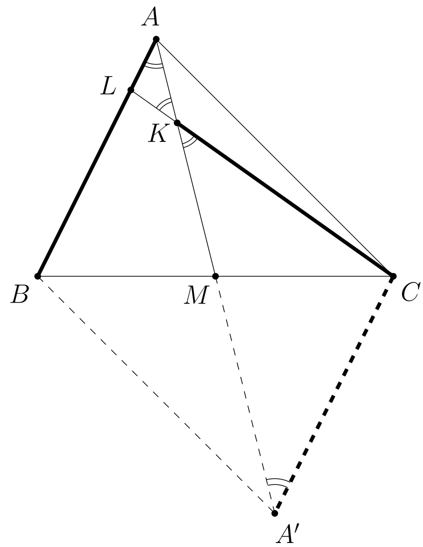
Všimněme si, že v řešení úlohy nebylo potřeba nijak zdůvodňovat, proč jsme dokreslili právě bod S. Pro správnost postupu stačilo ověřit, že $FDES$ je skutečně rovnoběžník. Na závěr si ukažme ještě jednu úlohu využívající dokreslení vhodného bodu.

Úloha 2.3. *V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC. Uvnitř těžnice AM je dán bod K splňující $|CK| = |AB|$. Přímka CK dále protíná stranu AB v bodě L. Dokažte, že trojúhelník LAK je rovnoramenný.*

Řešení. Na první pohled vůbec není jasné, odkud začít. Jediný náznak rovnoběžníku lze spatřit v bodě M, který půlí úsečku BC. Nepřístupnost úlohy přitom z velké části tkví v tom, že stejně dlouhé úsečky AB a CK jsou daleko od sebe – kdyby ale například vycházely ze stejného bodu, okamžitě by nám vygenerovaly nějaký rovnoramenný trojúhelník.



Zkusme to tedy napravit dokreslením bodu A', který je obrazem bodu A ve středové souměrnosti podle M. Čtyřúhelník $ABA'C$ je potom rovnoběžník, neboť bod M půlí obě jeho úhlopříčky.



Potom ale platí $|CK| = |CA'|$, takže trojúhelník $KA'C$ je rovnoramenný se základnou KA'. Máme tedy $|\sphericalangle A'KC| = |\sphericalangle KA'C|$. Ze střídavých úhlů u rovnoběžek CA' a AB navíc dostáváme $|\sphericalangle CA'A| = |\sphericalangle BAA'|$, z vrcholových úhlů u K dále platí $|\sphericalangle A'KC| = |\sphericalangle AKL|$.

Celkem jsme tedy nalezli dva stejně velké úhly v trojúhelníku KAL, tento trojúhelník je proto skutečně rovnoramenný. □

Na závěr by se slušelo poznamenat, že výše uvedené úlohy mají i jiná řešení – alternativní řešení prvních dvou z nich lze najít i na stránkách ročníků matematické olympiády [MO]. Hledání a dokreslování rovnoběžníků přitom určitě u mnoha úloh nepomůže vůbec. Přesto jsme se ale snad přesvědčili, že je někdy velmi hodnotné, hezké a některé úlohy vyřeší téměř okamžitě.

Literatura

[MO] Matematická olympiáda
`www.matematickaolympiada.cz`

[D] J. Tkadlec: *Dokreslování*, sborník MKS, 2013.
`https://mks.mff.cuni.cz`

[AoPS] Art of Problem Solving
`https://artofproblemsolving.com/community`

O CELÝCH ČÍSLECH, DĚLITELÍCH A NÁSOBCÍCH

Marian Poljak

Většinou pracujeme s reálnými čísly, kterými jsou například 1, $-2{,}15$, π, $6\sqrt{3}$. Celá čísla, jak již název napovídá, jsou laicky řečeno ta čísla, která se dají zapsat arabskými číslicemi bez použití desetinné čárky či tečky – čísla, která nemají žádnou zlomkovou část. Příklady celých čísel jsou -30, 54, 0, 1 111, -2. Přirozená čísla jsou ta z nich, která jsou větší než nula, tedy 1, 2, 3, ...

Podívejme se na úlohu 69-C-I-3 z matematické olympiády:

Určete všechny dvojice přirozených čísel a a b, pro něž platí:

$$2[a,b] + 3(a,b) = ab,$$

kde $[a,b]$ značí nejmenší společný násobek a (a,b) největší společný dělitel přirozených čísel a a b.

V tomto textu se podíváme na příbuzné úlohy a také obecné koncepty, které se dají při řešení podobných úloh s výhodou využít.

1 Více o celých číslech

Přirozená čísla (značena $\mathbb{N}$) jsou podmnožinou celých čísel (značena $\mathbb{Z}$). Obě tyto skupiny jsou podmnožinou reálných čísel, ta značíme $\mathbb{R}$.

Důvod, proč dává smysl zabývat se těmito speciálními podmnožinami reálných čísel je, že mají na rozdíl od obecných reálných čísel speciální vlastnosti. Nejdůležitějším konceptem je bezesporu dělitelnost.

Definice 1.1. *Mějme celá čísla $a \neq 0$ a b. Pokud existuje celé číslo n takové, že $an = b$, pak a dělí b (značíme $a \mid b$).*

Například tedy $7 \mid 21$ nebo $12 \mid 108$, ale $18 \nmid 25$. Na tuto notaci je dobré si zvyknout.

Definice 1.2. *Přirozené číslo a je prvočíslo, má-li právě dva různé dělitele – sebe samého a jedničku.*

Nejmenších pět prvočísel jsou $2, 3, 5, 7$ a 11.

Definice 1.3. *Mějme přirozená čísla a, b. Největším společným dělitelem a, b nazveme takové nejvyšší přirozené číslo, které dělí a i b. Nejmenším společným násobkem čísel a, b nazveme takové nejmenší přirozené číslo, které je děleno a i b. Největší společný dělitel a, b značíme (a, b), nejmenší společný násobek $[a, b]$.*

Definice 1.4. *Přirozená čísla a, b nazveme nesoudělná, pokud je jejich největší společný dělitel roven jedné.*[12]

2 Rovnice s celými čísly

Úloha 2.1. *Řešte rovnici $ab - 9 = 4a + 5b$ pro celá čísla a, b.*

Úloha může připadat neintuitivní někomu, kdo dosud nepracoval s rovnicemi v oboru celých čísel. Je to jediná rovnice, přitom obsahuje dvě neznámé – a takové přece mívají nekonečně mnoho řešení. Na rozehřátí úlohu vyřešíme nejdříve v reálných číslech pomocí vyjádření jedné z proměnných:

$$a = \frac{5b + 9}{b - 4} z\,. \tag{1}$$

Pro reálná čísla a, b můžeme z tohoto tvaru vidět, že kromě $b = 4$, kdy rovnice nemá řešení, máme pro každou hodnotu b odpovídající hodnotu a. Můžeme tedy říct, že vyhovující dvojice jsou tvaru $\left(\frac{5b+9}{b-4}, b\right)$ pro všechna $b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Nyní již v celých číslech.

Řešení. Původní rovnici upravíme na součinový tvar:

$$ab - 4a - 5b = 9$$

$$ab - 4a - 5b + 20 = 29$$
$$a(b - 4) - 5(b - 4) = 29$$
$$(a - 5)(b - 4) = 29$$

Nyní využijeme toho, že a, b jsou celá čísla. Číslo 29 je prvočíslo, lze tedy vyjádřit jako součin dvou celých činitelů pouze čtyřmi způsoby: $29 \cdot 1$, $1 \cdot 29$, $(-1) \cdot (-29)$, $(-29) \cdot (-1)$. To odpovídá jednotlivým řešením: $(34, 5)$, $(6, 33)$, $(4, -25)$, $(-24, 3)$. □

[12] Ač jsou poslední definice uvedeny pro přirozená čísla, není samozřejmě problém takto uvažovat o všech celých (tedy i záporných) číslech – vlastnosti jsou stejné.

Jiné řešení. Předchozí trikovou úpravu je dobré znát. Jiný způsob, jak využít toho, že čísla a, b jsou celá, je použít naše vyjádření neznámé a v rovnici (1). Jelikož je a celé číslo, musí být výraz na pravé straně rovnice také celé číslo - musí tedy platit $b-4 \mid 5b+9$. To je ekvivalentní s $b-4 \mid 5b+9-5(b-4) = 29$. Číslo $(b-4)$ tedy musí dělit 29, čímž opět dojdeme ke stejným čtyřem možnostem. Úvahu s dělitelností můžeme provést i přímo algebraicky zkrácením zlomku na pravé straně:

$$a = 5 + \frac{29}{b-4}\,.$$

□

3 Společní dělitelé a násobky

Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek jsou pojmy, které můžeme při řešení příkladů s celými čísly často využít. Pojďme si ukázat důležitý vztah.

Věta 3.1. *Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla a, b platí:*

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]\,.$$

Důkaz. Největší společný dělitel (a, b) (značme jej d) je největší soudělná část čísel a a b. Proto můžeme tyto proměnné vyjádřit jako $a = dx$ a $b = dy$, kde x, y jsou nesoudělná přirozená čísla. Nesoudělnost x, y vyplývá z toho, že kdyby x, y měly společného dělitele většího než 1, byl by to spor s volbou d jako největšího společného dělitele a, b – mohli bychom totiž vzít větší d, ve kterém bude tato další společná část zahrnuta.

Co je nyní nejmenší společný násobek? Z definice je to nejmenší přirozené číslo, které je dělitelné $a = dx$ i $b = dy$. Můžeme si všimnout, že dxy je dělitelné oběma těmito čísly. Dokonce je i nejmenším číslem s touto vlastností – kdyby existovalo menší číslo, muselo by být dělitelem dxy, tedy tvaru $\frac{dxy}{k}$ pro nějaké $k > 1$. Pokusíme-li se však toto číslo vydělit (beze zbytku) čísly a, b, dostaneme výsledky y/k a x/k – z nesoudělnosti x, y se tedy nemůže stát, že by oba tyto výrazy byly zároveň celá čísla. Tedy dxy je skutečně nejmenším přirozeným číslem, které je dělitelné a i b, proto je jejich nejmenším společným násobkem $[a, b]$. Dosazením do rovnice nyní dostaneme

$$dx \cdot dy = d \cdot dxy\,.$$

Což zřejmě platí – tím je věta dokázána. □

Poznámka 3.2. *Jsou-li přirozená čísla a, b nesoudělná, pak je jejich nejmenší společný násobek roven ab.*

Úloha 3.3. *Najděte všechna přirozená a, b, pro která platí:*

$$[a, b] - (a, b) = a + b\,.$$

Řešení. Označme $(a, b) = d$. Potom víme, že $a = dx$ a $b = dy$ pro nějaká nesoudělná x, y. Také díky větě výše víme, že $[a, b] = dxy$. Po dosazení a úpravě:

$$dxy - d = dx + dy$$

$$xy - 1 = x + y$$

$$(x - 1)(y - 1) = 2$$

Jediná řešení jsou očividně $x = 2$, $y = 3$ a $x = 3$, $y = 2$. Řešením původní rovnice jsou tedy $a = 2d$, $b = 3d$ a $a = 3d$, $b = 2d$ pro libovolné přirozené d. □

4 Pro zvědavé – zobecnění na 3 čísla

Platí $[a, b, c] \cdot (a, b, c) = abc$? Snadným dosazením např. trojice $(2, 2, 3)$ se můžeme přesvědčit, že nikoliv. Mezi největším dělitelem a nejmenším násobkem trojice čísel však existuje vztah, jenom je o něco složitější.

Věta 4.1. *Dokažte, že pro přirozená čísla a, b, c platí:*

$$[a, b, c] = \frac{abc \cdot (a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}\,.$$

Důkaz. Označme $(a, b, c) = d$. Tímto číslem musí být zřejmě dělitelné každé z čísel $(a, b), (b, c), (c, a)$. Můžeme tedy psát $(a, b) = dx$, $(b, c) = dy$, $(c, a) = dz$.

Nyní dokážeme sporem, že přirozená čísla x, y, z musí být po dvou nesoudělná – předpokládejme, že např. x i y jsou dělitelná nějakým prvočíslem p. Potom však $pd \mid (a, b)$ a zároveň $pd \mid (b, c)$. Odtud vyplývá, že pd musí dělit a, b i c a tedy $d < pd \mid (a, b, c)$, což je spor s naší volbou největšího společného dělitele trojice a, b, c.

O čísle a z dosavadních vztahů víme, že je dělitelné čísly dx a dz, kde x, z jsou nesoudělná. Z toho můžeme vyvodit, že a je dělitelné dxz, neboli $a = k \cdot dxz$ pro nějaké přirozené k. Analogicky $b = l \cdot dyx$ a $c = m \cdot dzy$ pro nějaká přirozená l, m. Nyní máme:

$$\begin{aligned} dx &= (a,b) = (kdxz, ldyx) = dx \cdot (kz, ly) \\ dy &= (b,c) = (ldyx, mdzy) = dy \cdot (lx, mz) \\ dz &= (c,a) = (mdzy, kdxz) = dz \cdot (my, kx) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aneb všechny výrazy (kz, ly), (lx, mz), (my, kx) musí být nutně rovny jedné. Odtud vyplývá, že čísla k, l, m jsou po dvou nesoudělná, dále dostáváme $(k, y) = (l, z) = (m, x) = 1$.

Tyto tři nesoudělnosti, spolu se vzájemnou nesoudělností trojic k, l, m a x, y, z, nyní všechny využijeme při určení hodnoty $[a, b, c]$. Následující řetězec rovností je dobré si opatrně rozmyslet a ujistit se, že opravdu použijeme každou nesoudělnost.[13]

$$\begin{aligned} &[a,b,c] = [kdxz, ldyx, mdzy] = d \cdot [kxz, lyx, mzy] = \\ &\quad dx \cdot [kz, ly, mzy] = dxy \cdot [kz, l, mz] = dxyz \cdot [k, l, m] = d \cdot xyz \cdot klm \end{aligned}$$

Nyní již vše můžeme dosadit:

$$d \cdot xyz \cdot klm = \frac{kdxy \cdot ldyz \cdot mdzx \cdot d}{dx \cdot dy \cdot dz}.$$

Rovnice platí, a tím je věta dokázána. □

5 Závěr

Celá čísla jsou velký svět a tento text obsahuje pouze ty nejelementárnější základy. Zájemcům doporučuji počítat úlohy z MO či přečíst *Metody řešení soustav algebraických rovnic*, kde je věnována celá kapitola řešení diofantických rovnic.

[13] Nesoudělností je devět: $(x, y) = (y, z) = (z, x) = (k, l) = (l, m) = (m, k) = (k, y) = (l, z) = (m, x) = 1$. Všechny vyplývají z (4.1).

OBSAHY V PLANIMETRII

Alena Skálová

V příspěvku shrnujeme základní obraty při řešení úloh týkajících se obsahu trojúhelníka a uvádíme výběr úloh – jednak řešených, jednak vhodných k samostatnému procvičení či doplnění. Myšlenky z příspěvku mohou být nápomocné při řešení úlohy 69-C-I-4 matematické olympiády, jež zní:

Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC je dán bod K. Označme M střed strany BC a předpokládejme, že rovnoběžka s přímkou AK vedená bodem M protne stranu AC ve vnitřním bodě L. Dokažte, že přímka KL dělí trojúhelník ABC na dvě části stejného obsahu.

1 Základy

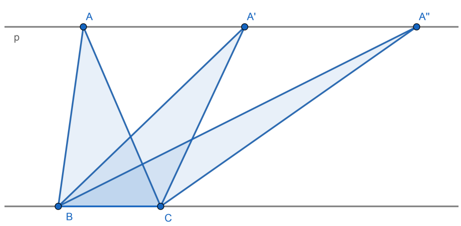
Značení $S(\ )$ budeme v tomto příspěvku používat pro obsah – např. obsah trojúhelníku ABC značíme $S(ABC)$, pro čtyřúhelník $KLMN$ značíme jeho obsah $S(KLMN)$, apod.

Začneme od píky – obsah trojúhelníku ABC se dá spočítat pomocí délky strany a jí příslušející výšky jako

$$S(ABC) = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}.$$

Následující pozorování je vcelku přímočaré, ale přitom velmi užitečné. Vlastně nám neříká nic jiného než poslední vzoreček (obsah trojúhelníku závisí na délce strany a výšce), zároveň je v úlohách velmi užitečné si uvědomit, že obsah trojúhelníku se nemění, pokud jeden jeho bod „posunujeme rovnoběžně s protilehlou stranou“.

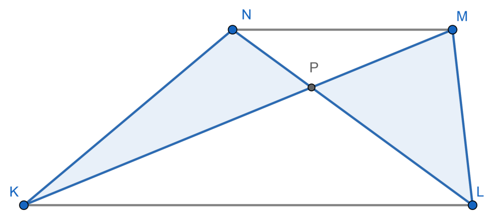
Lémma 1.1. *Ke straně BC trojúhelníku ABC veďme rovnoběžku p procházející bodem A. Pak pro každý bod A' ležící na p platí, že $S(A'BC) = S(ABC)$.*



Důkaz byl již v podstatě řečen. Označme v vzdálenost rovnoběžných přímek p a BC. Obsah $\triangle ABC$ spočteme jako $S(ABC) = \frac{|BC|v}{2}$. Pro trojúhelník $A'BC$ platí, že výška z bodu A' na stranu BC je též rovna v, a tedy rovněž $S(A'BC) = \frac{|BC|v}{2}$. □

Při řešení příkladů na obsahy bývá užitečné nejen nacházet rovnoběžné přímky a útvary se shodným obsahem, ale často se hodí rozdělit si obsah zkoumaného útvaru na více menších – a nebo naopak přidat si jiný útvar. Jako v následující úloze.

Úloha 1.2. *V lichoběžníku $KLMN$, kde $KL \parallel MN$, označme P průsečík úhlopříček. Dokažte, že platí $S(KPN) = S(PLM)$.*



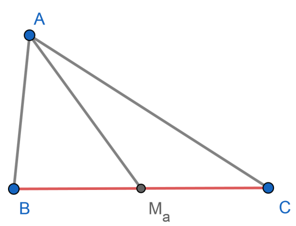
Řešení. Protože přímky procházející stranami KL a MN jsou rovnoběžné, mají trojúhelníky KLM a KLN stejný obsah (díky Lémmatu 1.1). Úsečka KP dělí trojúhelník KLN na dva: $\triangle KLP$ a $\triangle KPN$, tedy pro jejich obsahy platí $S(KLN) = S(KPL) + S(KPN)$. Podobně lze rozepsat obsah $\triangle KLM$ na $S(KLM) = S(KLP) + S(PLM)$. Nyní stačí dát všechny vztahy dohromady a získáváme požadované:

$$S(KPN) = S(KLN) - S(KLP) = S(KLM) - S(KLP) = S(PLM).$$

□

Třetí základní úlohou je využít pro porovnání obsahů dvou útvarů znalost o poměru délek jejich stran, výšek či jiných rozměrů:

Úloha 1.3. *Označme M_a střed strany BC trojúhelníku ABC. Ukažte, že trojúhelníky ABM_a a AM_aC mají stejný obsah.*



Návod. Využijte $|BM_a| = |M_aC|$.

Rozmyslete si. Obdobně se dá ukázat, že známe-li v trojúhelníku ABC poměr, kterým bod P dělí stranu BC na dvě části (tedy P je vnitřní bod úsečky BC), přenáší se tento poměr i na obsah trojúhelníků ABP a APC. Neboli

$$\frac{S(ABP)}{S(APC)} = \frac{|BP|}{|PC|}.$$

2 Střední příčky a další úlohy

V $\triangle ABC$ označme středy stran postupně M_a, M_b, M_c. Úsečky M_aM_b, M_bM_c, M_cM_a se nazývají *střední příčky* trojúhelníku ABC.

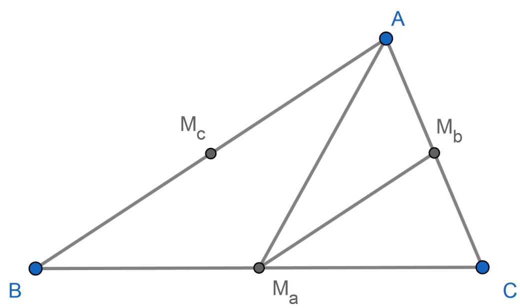
Lémma 2.1. *Platí, že střední příčky $\triangle ABC$ jsou rovnoběžné s odpovídající si stranou.*

Návod. Využijte podobnost trojúhelníků.

Úloha 2.2. *Dokažte, že střední příčky $\triangle ABC$ jej dělí na čtyři trojúhelníky, které mají všechny shodný obsah – rovný čtvrtině $S(ABC)$.*

Úlohu lze vyřešit mnoha přístupy, ukažme si jeden využívající úlohu 1.3. Můžeme namítat, že řešení přes podobnost by bylo rychlejší, ale nám jde o procvičení práce s poměry obsahů.

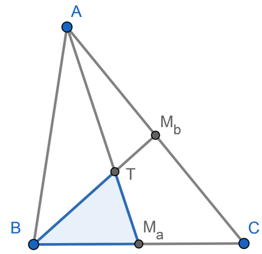
Řešení. Bod M_a je středem BC, proto $|BM_a| = |M_aC|$, a tedy $S(ABM_a) = S(AM_aC)$. Jelikož $S(ABC) = S(ABM_a) + S(AM_aC)$, dostáváme $S(ABM_a) = S(AM_aC) = \frac{1}{2}S(ABC)$.



Podobně postupujme pro $\triangle AM_aC$. Bod M_b půlí stranu AC, tudíž $|AM_b| = |M_bC|$, proto $S(AM_aM_b) = S(M_bM_aC)$. Stejně jako prve platí, že se jedná o polovinu obsahu „původního trojúhelníku“ – v tomto případě $\triangle AM_aC$, tím pádem $S(AM_aM_b) = \frac{1}{2}S(AM_aC) = \frac{1}{4}S(ABC)$.

Stejně bychom dokázali, že $S(BM_aB_c) = \frac{1}{4}S(ABC) = S(AM_cMb)$. Zbývající trojúhelník $M_aM_bM_c$ doplňuje obsah $\triangle ABC$ do celku, pročež $S(M_aM_bM_c) = S(ABC) - 3 \cdot \frac{1}{4}S(ABC) = \frac{1}{4}S(ABC)$. □

Úloha 2.3. *V $\triangle ABC$ označme T průsečík těžnic AM_a a BM_b. Spočítejte obsah $\triangle BM_aT$ v závislosti na $S(ABC)$.*



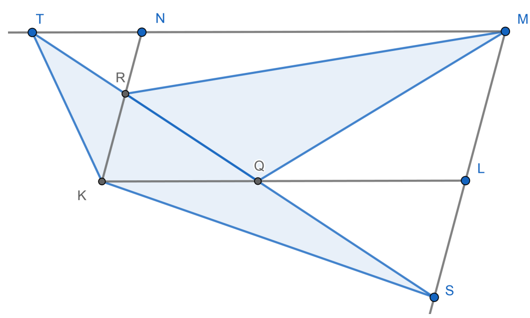
Řešení. Jelikož M_a je středem úsečky BC, mají trojúhelníky ABM_a a AM_aC stejný obsah, rovný polovině $S(ABC)$.

Víme, že těžiště dělí těžnici „ve třetině“, přesněji $|TA| = 2|TM_a|$, tudíž $S(ABT) = 2S(BM_aT)$. Zároveň $S(ABM_a) = S(ABT) + S(BM_aT)$, z čehož vyplývá

$$S(BM_aT) = \frac{1}{3}S(ABM_a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S(ABC) = \frac{1}{6}S(ABC),$$

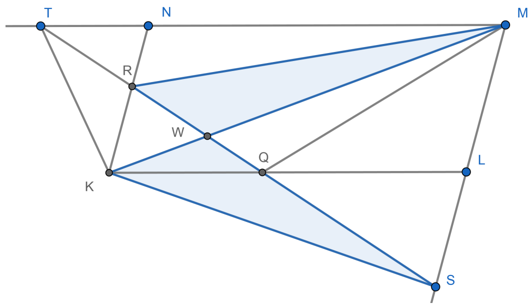
neboli obsah $\triangle BM_aT$ je roven jedné šestině obsahu $\triangle ABC$. □

Úloha 2.4 ([RŠ], př. 7). *Mějme rovnoběžník $KLMN$ na jehož stranách KL a KN leží body Q a R. Přímka QR protne přímky ML a MN v bodech S, T. Dokažte, že $S(TKS) = S(MRQ)$.*



Řešení. Na první pohled není zřejmé, proč by trojúhelníky TKS, MRQ měly mít stejný obsah – rozdělíme si proto každý na dvě části, jejichž obsahy už budeme umět porovnat. Trik spočívá v dokreslení úsečky KM.

Označme W průsečík KM s QR a podívejme se na trojúhelníky KSW, MRW:



Protože $KR \| SM$ ($KLMN$ je rovnoběžník), dostáváme stejnou argumentací jako v úloze 1.2, že $S(KSW) = S(MRW)$. Obdobně díky rovnoběžnosti $KQ \| TM$ odvodíme $S(TKW) = S(QMW)$.

Odtud již plyne, co jsme měli dokázat, neboť

$$S(TKS) = S(TKW) + S(KSW) = S(QMW) + S(MRW) = S(MRQ).$$

$\square$

3 Na procvičení

Úloha 3.1 ([RŠ], př. 4)**.** *Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník a body K a L, resp. M a N, leží na straně AB, resp. CD, tak, že platí $AK = KL = LB$, resp. $CM = MN = ND$. Ukažte, že $3 \cdot S(KLMN) = S(ABCD)$.*

Úloha 3.2. *Je dán $\triangle ABC$ a uvažujme takové body P, že trojúhelníky ABP, ACP mají stejný obsah. Dokažte, že množina všech takových bodů P je přímka, na níž leží těžnice na stranu a.*

Úloha 3.3 ([RŠ], lemma 2)**.** *Mějme trojúhelníky ABC a ABD takové, že AB není rovnoběžná s CD. Buď P průsečík AB a CD. Dokažte, že platí*

$$\frac{S(ABC)}{S(ABD)} = \frac{|CP|}{|DP|}.$$

Úloha 3.4. *Buď $KLMN$ lichoběžník s $KL \| MN$. Středy stran LM, NK označme po řadě P, Q. Dokažte, že potom platí $|PQ| = (|KL| + |MN|)/2$.*

Úloha 3.5 ([MKS], 35-4-5)**.** *Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme M a N středy stran AB a CD. Průsečík AN s DM označme P, průsečík NB s MC označme Q. Dokažte, že platí*

$$S(ADP) + S(BCQ) = S(MQNP).$$

Úloha 3.6 ([MKS], 27-3-7)**.** *Buď H vnitřní bod trojúhelníku ABC. Ukažte, že platí*

$$4 \cdot S(ABC) \leq |AH| \cdot |BH| + |BH| \cdot |CH| + |CH| \cdot |AH|.$$

Literatura

[MKS] Matematický korespondenční seminář MFF UK (MKS), úlohy z různých ročníků uváděné ve tvaru ročník-série-číslo úlohy `mks.mff.cuni.cz`

[RŠ] Matematický korespondenční seminář MFF UK (MKS), přednáška Radovana Švarce *Obsahy* `http://mks.mff.cuni.cz/common/show.php?title=Obsahy&file=library/ObsahyRS/ObsahyRS`

LATINSKÉ A MAGICKÉ ČTVERCE

Antonín Jančařík

1 Úvod

Latinské čtverce jsou čtvercové tabulky o n řádcích a n sloupcích vyplněné n symboly takové, že v žádném řádku ani sloupci se žádný symbol neopakuje. Oproti tomu magické čtverce jsou čtvercové tabulky o n řádcích a n sloupcích vyplněné n^2 čísly takové, že součet čísel v každém řádku i sloupci je stejný. U magických čtverců je někdy přidáván i požadavek, aby stejný součet měly i obě hlavní diagonály.

První zmínky o magických čtvercích jsou zaznamenány již v roce 650 před naším letopočtem, oproti tomu latinské čtverce jsou o mnoho mladší. První zmínky pochází z počátku 18. století našeho letopočtu. Zatímco magické čtverce jsou nyní považovány za součást rekreační matematiky, latinské čtverce, respektive algebraické struktury s nimi spojené – kvazigrupy a lupy, jsou využívány v různých oblastech matematiky a informatiky.

To, že magické čtverce řadíme do rekreační matematiky, nijak neznamená, že nemohou existovat i velmi těžké úlohy s nimi spojené. Například úloha nalézt magický čtverec řádu 3, tvořený devíti po sobě jdoucími prvočísly, jistě nepatří k nejjednodušším. A jen na okraj, latinské čtverce byly poprvé použity a zkoumány právě pro potřeby tvorby čtverců magických.

Pokud vás otázka magického čtverce tvořeného prvočísly zaujala, uvádíme jeden příklad. Můžete se ale pokusit najít další.

1480028159	1480028153	1480028201
1480028213	1480028171	1480028129
1480028141	1480028189	1480028183

2 Sudoku

Asi nejčastějším případem latinského čtverce, se kterým se můžete v současnosti setkat, je vyplněná tabulka Sudoku. V každém řádku i sloupci se vyskytují všechna čísla od jedné do devíti, přičemž se žádné číslo neopakuje. Tabulka Sudoku navíc splňuje podmínku, že se čísla neopakují ani v devíti podčtvercích 3×3.

9	4	7	3	6	8	2	5	1
3	1	8	9	2	5	6	7	4
5	6	2	7	1	4	3	9	8
7	5	4	8	3	6	9	1	2
1	9	3	4	5	2	8	6	7
2	8	6	1	7	9	5	4	3
6	2	1	5	8	7	4	3	9
4	3	5	2	9	1	7	8	6
8	7	9	6	4	3	1	2	5

Obr. 1: Příklad tabulky Sudoku

Na tabulku Sudoku se můžeme také dívat jako na tabulku popisující speciální operaci $*$, definovanou na číslech 1–9. Výsledek operace $k * l$ nalezneme v k-tém řádku a l-tém sloupci tabulky Sudoku.

Ve škole se probírají různé vlastnosti binárních operací. Mezi nejznámější patří následující:

- komutativita
- asociativita
- existence neutrálního prvku
- existence inverzních prvků

Ukážeme si, že operace definovaná tabulkou Sudoku (rozuměj každá operace definovaná nějakou tabulkou Sudoku), nemá žádnou z uvedených čtyř vlastností.

Věta 2.1. *Operace $*$ definovaná tabulkou Sudoku není komutativní, asociativní, nemá neutrální prvek, ani inverzní prvky.*

Důkaz. **Komutativita**

Pokud by operace $*$ měla být komutativní, tak by také muselo platit $1 * 2 = 2 * 1$, tedy v prvním řádku druhém sloupci by muselo být stejné číslo, jako v druhém řádku v prvním sloupci. To by ale znamenalo, že by se v jednom subčtverci 3×3 nacházelo jedno číslo dvakrát. Což je v rozporu s pravidly Sudoku.

Existence neutrálního prvku

Předpokládejme, že v tabulce Sudoku existuje neutrální prvek n, pro který platí $n * k = k = k * n$ pro každé k (tento prvek nemusí být 1, ale může jim být libovolné jiné číslo). Číslo n, patří do jedné z trojic čísel $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ a nechť číslo m různé od n patří do stejné trojice čísel. Potom nutně platí $n*m = m = m*n$ a číslo m se vyskytuje dvakrát v jednom z subčtverců 3×3, což je v rozporu s pravidly Sudoku.

Existence inverzních prvků

Existence inverzních prvků je vázána na existenci neutrálního prvku. Pokud nějaká operace nemá neutrální prvek, nemůže mít ani prvky inverzní.

Asociativita

Asociativita je u operací, se kterými se běžně setkáváme, natolik častá, že si její význam ani neuvědomujeme. Například skládání některých zobrazení nemusí být komutativní, ale skládání zobrazení je vždy asociativní. Tabulky Sudoku však vždy představují operaci neasociativní, to znamená, že v každé z nich vždy nalezneme trojici prvků k, l, m, pro kterou platí $k * (l * m) \neq (k * l) * m$.

Pokud zkoumáte konkrétní tabulku Sudoku, tak obvykle není obtížné takovou trojici nalézt. V podstatě stačí nějakou trojici zvolit a výpočtem překontrolovat. Tímto postupem velmi brzo najdete neasociativní trojici. Naším úkolem je ale ukázat, že žádná tabulka Sudoku není asociativní. Procházet všechny tabulky Sudoku by bylo velmi časově náročné, protože jich existuje 6 670 903 752 021 072 936 960. Takže i kdybychom jich prověřili 1 000 za sekundu, byla by to práce na více než 200 miliard let. (Jen na okraj, jen zhruba jeden z milionu latinských čtverců je tabulkou splňující pravidla Sudoku).

Předpokládejme, že tabulka Sudoku je asociativní. Ukážeme, že potom musí obsahovat i neutrální prvek. Již dříve jsme ale ukázali, že tabulka Sudoku neutrální prvek obsahovat nemůže, a proto nemůže být ani asociativní. Důkaz provedeme v několika krocích:

1. V každém řádku i sloupci se vyskytují všechna čísla od jedné do devíti. Proto se číslo 1 musí vyskytovat i v prvním řádku. Předpokládejme, že je tomu tak ve sloupci a. Platí tedy $1 * a = 1$. Pokusíme se ukázat, že a je neutrálním prvkem. Tedy, že $b * a = b = a * b$ pro libovolné b.

2. Zvolme tedy b libovolně. Protože se v každém sloupci vyskytují všechna čísla, musí se b vyskytovat i v prvním sloupci tabulky, dejme

tomu v řádku c. Platí tedy $b = c * 1$. A nyní víme, že $b * a = (c * 1) * a = c*(1*a) = c*1 = b$. Ve výpočtu jsme použili rovnost z předchozího bodu a asociativitu operace. Ukázali jsem, že za předpokladu, že operace $*$ je asociativní, pro každý prvek b platí rovnost $b * a = b$. Prvek a je tedy zprava neutrální.

3. Pokud nyní zopakuje předchozí úvahy, ale prohodíme řádky za sloupce, tak nalezneme prvek d, který je zleva neutrální. Tedy pro každý prvek c platí, ze $d * c = c$. Nyní stačí ukázat, že prvky a a d se rovnají.

4. Dokázat $a = d$ je již velmi snadné. Je zjevné, že $d * a = d$ protože a je zprava neutrálním prvkem. Ale současně $d * a = a$, protože d je zleva neutrálním prvkem. Musí tedy platit $a = d$, tabulka Sudoku má neutrální prvek, což je ale spor s pravidly Sudoku. Musíme tak zamítnout předpoklad, že by tabulka Sudoku byla asociativní. □

3 Jak z jednoho latinského čtverce získat další

Pokud již vytvoříme latinský nebo magický čtverec (bez podmínky na diagonály), tak z něj můžeme různými způsoby snadno odvodit další latinské čtverce. Například pokud změníme pořadí řádků, či sloupců, získáváme další latinské čtverce. U latinských čtverců můžeme také přejmenovat jednotlivé prvky, které se ve čtverci nachází a opět dostaneme latinský čtverec. Tuto operaci ovšem nemůžeme provést u čtverce magického, protože by došlo k narušení součtů. U magických čtverců můžeme zaměnit řádky a sloupce a opět dostáváme latinský čtverec.

Latinské čtverce, u kterých jeden vznikl z druhého změnou pořadí sloupců, řádků a přejmenováním prvků nazýváme navzájem izotopní.

Úloha 3.1. *Zjistěte, kolik je latinských čtverců* 3×3.

Řešení. U latinského čtverce 3×3 můžeme bez omezení vyplnit první řádek tak, aby se v něm neopakoval žádný prvek. To můžeme udělat $3! = 6$ možnostmi. Když začneme vyplňovat druhý řádek, tak existují jen dvě možnosti, jak doplnit prvek do prvního sloupce (protože se musí lišit od prvku v prvním sloupci). Pro každou z těchto možností je pak již doplnění dalších prvků jednoznačné. Existuje tak pouze 12 latinských čtverců 3×3. □

Úloha 3.2. *Zjistěte, kolik latinských čtverců* 3×3 *můžete získat ze zadaného latinského čtverce permutací řádků a sloupců.*

Řešení. Ze zadaného latinského čtverce velikosti 3×3 můžete získat všechny latinské čtverce. Permutací sloupců získáte identický první řádek a následně buď prohodíte, nebo neprohodíte druhý a třetí řádek. □

Z řešení předchozí úlohy vyplývá, že všechny latinské čtverce 3×3 jsou izotopní.

Úloha 3.3. *Dokážete nalézt 2 latinské čtverce 4×4, které nejsou izotopní? To znamená nemůžete převést jeden na druhý pomocí permutace řádků, sloupců a přejmenováním prvků.*

Řešení. Takové dva latinské čtverce skutečně existují, jejich nalezení však přenecháváme laskavému čtenáři. Každý další latinský čtverec 4×4 je pak izotopní jednomu z těchto dvou čtverců. □

Úloha 3.4. *Pokud máte zadaný magický čtverec 3×3, kolik různých latinských čtverců z něj můžete získat pomocí permutace řádků, sloupců či prohozením řádků a sloupců?*

Řešení. Permutací řádků lze získat 6 nových latinských čtverců, permutací sloupců ke každému z nich dalších 6 a prohozením řádků a sloupců se počet čtverců zdvojnásobuje. Pokud výchozí magický čtverec obsahoval devět různých číslic, tak je zjevné, že se každých z takto získaných magických čtverců liší od ostatních. Celkem tak lze pomocí základních operací z každého magického čtverce získat 72 čtverců. □

Úloha 3.5. *Představte si, že máte magický čtverec 3×3 tvořený pouze jedničkami a nulami. Kolik v něm může být jedniček?*

Řešení. Protože součet všech řádků musí být stejný, musí být v každém řádku použit stejný počet jedniček jako v řádcích ostatních. Čtverec tak musí obsahovat 0, 3, 6 nebo 9 jedniček. □

MAXIMA A NEROVNOSTI

Zdeněk Halas

Dokazování nerovností a hledání maxim zadaných výrazů patří k zásadním matematickým dovednostem. Hledání odhadů, omezení výrazů shora či zdola, se výborně hodí například při budování matematické analýzy (derivace, integrály, diferenciální rovnice a další partie vyšší matematiky). Ta také poskytuje velmi mocné nástroje pro hledání maxim a minim funkcí. Ukazuje se však, že v různých případech není vyšší matematiky k úspěšnému vyřešení takových úloh vůbec potřeba. Leckdy jsou totiž výrazy, s nimiž pracujeme, ve speciálním tvaru, který umožňuje najít maximum daného výrazu elementárními prostředky. Takovou úlohou je i 69-C-I-6 matematické olympiády, jejíž zadání zní:

Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 1$. *Najděte největší možnou hodnotu součtu* $a + b + c$.

V tomto textu se budeme věnovat ukázkám použití jednoduché myšlenky, díky které pohodlně dokážeme zadané nerovnosti, případně nalezneme maxima zadaných výrazů. Budeme přitom pracovat výhradně v oboru reálných čísel, v oboru celých či přirozených čísel se totiž využívají jejich specifické vlastnosti (existence rozkladu na součin prvočísel a podobně).

Základní myšlenkou je, že druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}: \quad a^2 \geq 0}$$

Místo prostého a můžeme psát i jakýkoli jiný výraz, například:

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad (a-b)^2 \geq 0\,.}$$

Vhodnou úpravou či volbou výrazu umocněného na druhou pak můžeme dostávat různé nerovnosti.

1 Průměry

Jednoduchou, přímou a užitečnou aplikací výše uvedené myšlenky dostaneme důkaz vztahu mezi průměry.

Pro každá dvě kladná reálná čísla $a, b > 0$ můžeme definovat různé průměry. Nejznámější je aritmetický:

$$A = \frac{a+b}{2}\,.$$

Běžně používaný je také průměr geometrický (lze jej znázornit geometricky pomocí Eukleidovy věty o výšce):

$$G = \sqrt{ab}\,.$$

Občas se také používají jiné průměry, například při hledání průměrné rychlosti[14] se přirozeně objeví tzv. harmonický průměr:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}\,.$$

Ve statistice či fyzice je občas potřeba i kvadratický průměr:

$$K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

Úloha 1.1. *Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla $a, b > 0$ platí*

$$H \le G \le A \le K\,.$$

Řešení. Cest k tomuto důkazu je více. Můžeme například vyjít z nerovnosti $0 \le (a-b)^2$. Odtud ihned plyne:

$$2ab \le a^2 + b^2\,.$$

- Přičtením $2ab$ k oběma stranám doplníme pravou stranu na čtverec $4ab \le (a+b)^2$ a po odmocnění ihned dostáváme $G \le A$.
- Přičteme-li k oběma stranám naopak a^2+b^2, doplníme na čtverec levou stranu: $(a+b)^2 \le 2\cdot(a^2+b^2)$. Nyní již stačí vydělit čtyřmi $(\frac{a+b}{2})^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$ a po odmocnění ihned dostáváme $A \le K$.

Pokud bychom vyšli z nerovnosti $0 \le (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, dostali bychom

$$2\sqrt{ab} \le a+b\,,$$

[14] Např. z bodu A do bodu B jedeme průměrnou rychlostí 60 km/h, zpět pak průměrnou rychlostí 40 km/h; jakou jsme jeli průměrnou rychlostí počítáno za obě cesty dohromady? Není to 50 km/h, jak by se snad mohlo na první pohled zdát, ale „jen“ $H(60,40) = 48$ km/h.

tedy opět $G \leq A$.

Zbývá ještě dokázat $H \leq G$. Stačí upravit poslední nerovnost

$$2\sqrt{ab} \leq a+b \quad\Longrightarrow\quad \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}\,.$$

Všimněme si, že pro $a = b$ jsou si všechny průměry rovny. □

Mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem dvou různých kladných čísel vždy leží například následující výraz, jak upozorňuje např. úloha 58-C-I-6.

Úloha 1.2. *Dokažte, že pro každá dvě různá kladná reálná čísla $a, b > 0$, $a \neq b$, platí*

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

Řešení. Obě části lze dokázat pomocí úprav, které jsou za daných předpokladů ekvivalentní.

1. $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} \quad\Longleftrightarrow\quad 3(a^2+2ab+b^2) < 4(a^2+ab+b^2)$
   Po odečtení členů zbude $0 < a^2 - 2ab + b^2$, což zřejmě platí.

2. Po umocnění nerovnosti

   $$\frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

   na druhou dostaneme

   $$4(a^2+ab+b^2)^2 \cdot 2 < 9(a+b)^2(a^2+b^2)\,.$$

   Přímočaré úpravy pak vedou k důkazu nerovnosti.

$$8 \cdot [(a+b)^2 - ab]^2 < 9(a+b)^2 \cdot [(a+b)^2 - 2ab]$$

$$\begin{gathered}
8 \cdot [(a+b)^4 - 2ab(a+b)^2 + a^2b^2] < 9 \cdot [(a+b)^4 - 2ab(a+b)^2] \\
8a^2b^2 < (a+b)^4 - 2ab(a+b)^2 \\
0 < [(a+b)^4 - 2ab(a+b)^2 + a^2b^2] - 9a^2b^2 \\
0 < [(a+b)^2 - ab]^2 - (3ab)^2 \\
0 < [(a+b)^2 - 4ab] \cdot [(a+b)^2 + 2ab] \\
0 < (a-b)^2 \cdot [(a+b)^2 + 2ab]
\end{gathered}$$

□

2 Nerovnosti

Úloha 2.1. *Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla $a, b > 0$ platí*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\,.$$

Řešení. Vynásobením nerovnosti výrazem ab ihned dostaneme

$$a^2 + b^2 \geq 2ab\,.$$

Provedení poslední úpravy vedoucí k důkazu je snadné, přesto ji provedeme: $(a-b)^2 \geq 0$, neboť z ní názorně plyne, kdy nastává rovnost: je to právě tehdy, když $a = b$. □

Jednoduchou modifikací ($x = \frac{a}{b}$) dostaneme pro $x > 0$ nerovnost

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\,,$$

kterou lze dokázat i přímo vynásobením x; rovnost nastává pouze pro $x = 1$.

Úloha 2.2. *Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla $a, b > 0$ platí*

$$(a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4\,.$$

Řešení. Jedná se vlastně o nerovnost $H \leq A$. Vynásobením zadané nerovnosti výrazem ab vznikne $(a+b)^2 \geq 4ab$, která převedením členu z pravé strany na levou přejde v nerovnost $(a-b)^2 \geq 0$. □

Úloha 2.3. *Dokažte, že pro každá tři kladná reálná čísla $a, b, c > 0$ platí*

$$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\,.$$

Řešení. Nyní nebudeme postupovat analogicky důkazu předchozího příkladu, ale výrazy v závorkách na levé straně prostě vynásobíme:

$$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1+1+1+ \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad + \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \quad + \quad \frac{c}{b} + \frac{b}{c}\,.$$

Součet zlomku a jeho převrácené hodnoty je větší nebo roven 2 dle úlohy 2.1, a tak je levá strana větší nebo rovna $3+2+2+2 = 9$. □

Provokace 1: Platí $(a+b+c+d)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$ pro každá $a,b,c,d>0$?

Provokace 2: Platí $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$ pro každá $x_1,\dots,x_n>0$ a pro každé $n\in\mathbb{N}$?

Postupně se dostáváme k více než dvěma proměnným. Klasickou aplikací nerovnosti

$$a^2+b^2\geq 2ab\,,$$

jež platí pro každá reálná a, b, je její využití při dokazování různých nerovností i se třemi proměnnými, viz např. [Ve], str. 26. Sečteme-li nerovnosti

$$\begin{aligned} a^2+b^2&\geq 2ab\,,\\ b^2+c^2&\geq 2bc\,,\\ c^2+a^2&\geq 2ca\,, \end{aligned}$$

dostaneme (po vydělení dvěma) známou nerovnost

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\,.$$

Všimněme si, že rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c$, neboť jednotlivé dílčí nerovnosti lze přepsat do tvaru $(a-b)^2\geq 0$, $(b-c)^2\geq 0$, $(c-a)^2\geq 0$. Součet levých stran bude nulový (tj. roven pravé straně) právě tehdy, když bude nulový každý z nezáporných sčítanců.

Možná ještě jednodušší je důkaz nerovnosti, který byl zadán v úloze 58-C-S-1.

Úloha 2.4. *Dokažte, že pro každá tři nezáporná reálná čísla $a,b,c\geq 0$ platí*

$$(a+bc)\cdot(b+ac)\geq ab(c+1)^2\,.$$

Řešení. Prostým roznásobením vznikne

$$ab+a^2c+b^2c+abc^2\geq abc^2+2abc+ab\,,$$

$$a^2c+b^2c\geq 2abc\,,$$

$$c\cdot(a-b)^2\geq 0\,.$$

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že c je nezáporné a provedené úpravy jsou ekvivalentní. $\square$

3 Maxima

Hledání maxima zadaného výrazu (tj. největší možné hodnoty, kterou může tento výraz na dané množině nabývat) za daných podmínek souvisí s dokazováním nerovností, neboť hledáme nejmenší číslo takové, aby zadaný výraz nabýval hodnot menších než toto číslo. Ilustrujme to na jednoduché úloze 58-C-II-1.

Úloha 3.1. *Na množině reálných čísel je zadána funkce*

$$f(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}\,.$$

Najděte maximum této funkce na $\mathbb{R}$.

Řešení. Jednoduchou úpravou (dělením) dostaneme

$$f(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1} = 5 - \frac{4x^2}{x^4 + 1}\,.$$

Jelikož je $\dfrac{4x^2}{x^4 + 1} \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, platí $f(x) \leq 5$ na celém $\mathbb{R}$. Abychom dokázali, že maximum funkce f na $\mathbb{R}$ je skutečně 5, je třeba ukázat, že této hodnoty pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ skutečně nabývá. To je však snadné, pro $x = 0$ je $\frac{4x^2}{x^4+1} = 0$, a tak je hodnota 5 funkcí f skutečně nabývána ($f(0) = 5$). Můžeme tedy psát:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5\,.$$

□

Hledání maxim funkcí více proměnných na zadané množině může být podobně jednoduché.

Úloha 3.2. *Dokažte, že maximum funkce* $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ *je na množině* $M = \{x, y, z \in \mathbb{R};\ x + y + z = 3\}$ *je rovno třem.*

Řešení. Máme dokázat, že pro všechna reálná x, y, z, jejichž součet je 3, platí

$$xy + yz + zx \leq 3\,.$$

Vyjdeme ze zadané podmínky $x+y+z = 3$. Jejím umocněním na druhou dostáváme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9\,.$$

V předchozí kapitole jsme odvodili, že $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$, a tak

$$3 \cdot (xy+yz+zx) \leq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 9\,.$$

Proto

$$xy+yz+zx \leq 3\,.$$

Abychom ověřili, že hodnota 3 je skutečně maximem, musíme najít taková x, y, z splňující podmínku $x+y+z=3$, že $f(x,y,z) = xy+yz+zx = 3$. Ihned je však vidět, že pro $x=y=z=1$ je skutečně $xy+yz+zx=3$, a tak je hodnota 3 skutečně maximem funkce f za zadané podmínky. □

Pokud bychom k zadání předchozí úlohy přidali podmínku $x^2+y^2+z^2=5$, tak by funkce $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ nabývala na množině M maxima 2 (funkce f by byla na množině $\{x,y,z \in \mathbb{R};\ x+y+z=3,\ x^2+y^2+z^2=5\}$ dokonce konstantní). Důkaz není těžký, a tak jej přenecháváme k samostatnému provedení.

Existuje celá řada dalších nerovností, které hrají v matematice zásadní roli. V tomto krátkém textu jsme se soustředili na ty, které lze snadno dokázat elementárními prostředky, zejména převedením na nerovnost $(a-b)^2 \geq 0$ platnou pro každé $a, b \in \mathbb{R}$. Následně jsme naznačili, že podobným způsobem je možno hledat maxima některých funkcí, jejichž předpis může na první pohled vypadat komplikovaně, avšak pomocí jednoduchých úprav je možno jej „zpřehlednit“, a tak snadno najít jejich maximum.

Literatura

[Ve] Fr. Veselý: *O nerovnostech.* Ed. Škola mladých matematiků, sv. 5. Mladá fronta, Praha, 1963.

Autoři: Tomáš Bárta, Filip Bialas, Šárka Gergelitsová, Zdeněk Halas, David Hruška, Antonín Jančařík, Jan Krejčí, Jakub Löwit, Luboš Pick, Marian Poljak, Mirko Rokyta, Alena Skálová, Antonín Slavík, Radovan Švarc

Recenzenti: doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.

Editoři: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Vydalo nakladatelství MatfyzPress jako svou 593. publikaci.

Vytištěno ze sazby dodané autory.

Publikace neprošla jazykovou korekturou.

Vytisklo Reprostředisko UK MFF

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

Vydání první

Praha 2019

ISBN 978-80-7378-399-0